Wirtschaftswissenschaftliches Zentrum WWZ
Universität Basel

Prof. Dr. Heinz Zimmermann

Optionspreistheorie

Zusammenfassung zur Vorlesung

von:
Daniel Frank
daniel_frank@gmx.ch

0 Einleitung

Derivative Finanzinstrumente existieren eigentlich schon sehr lange, haben aber erst in den vergangenen 20 Jahren jene Bedeutung erlangt, die ihnen heute in den internationalen Finanzmärkten zukommt.

Die Definition eines "Derivativen Finanzistruments" oder "Derivates" ist nicht unproblematisch. Eine mögliche Definition (vor allem der "klassischen" Derivate") lautet:

> *Ein Instrument, dessen Wert sich aus einer anderen Vermögensanlage ableitet.*

Diese Definition deckt zum Beispiel Aktienoptionen, Futureskontrakte, Zins- und Währungsswaps ab. Daneben existiert aber eine Vielzahl von Derivaten, die ihren Wert nicht aus einer Vermögensanlage ableiten, zum Beispiel sogenannte Katastrophen-Optionen (die ihren Wert von der Höhe eines Versicherungsschadens abhängig machen) oder Caps (die ihren Wert aus Veränderungen der Zinsrate ableiten). Um diesen Formen von Derivaten gerecht zu werden, muss die Definition erweitert werden:

> *Ein Instrument, dessen Wert sich aus der Veränderung einer risikobehafteten Grösse ableitet.*

Diese Definition wiederum ist zu umfassend (sie beinhaltet zum Beispiel auch Aktien, deren Wert sich auf die risikobehaftete Wertentwicklung einer Unternehmung bezieht).

Die Definitionsschwierigkeiten sind durchaus keine rein akademische oder terminologische Fragestellung, es wirft auch regulatorische Probleme auf: welche Produkte und Instrumente fallen unter ein Derivatgesetz? Macht es Sinn, den Markt von Rohstoff-Derivaten zu regulieren, nicht aber den Rohstoffhandel selbst?

Im Moment liefert die befriedigendste Definition nicht die Frage, was ein Derivat ist, sondern was ein Derivat tut: Ziel eines Derivates ist immer die Risiko(re)allokation. Entsprechend der breiten Palette möglicher Risiken muss auch die Definition eines Derivates sehr breit sein, aber selbst diese Definition ist nicht frei von Widersprüchen (Aktien können aufgefasst werden als Instrument der Risikoallokation, indem das Risiko des Firmenbesitzes von einem einzelnen oder einem kleinen Kreis von Investoren auf eine breite Masse verteilt wird).

Auf Derivatmärkten treten drei Arten von Akteuren (bzw. drei Arten von Transaktionen) in Erscheinung:

- Hedging:
  - Begrenzung von Risiko
- Spekulation:
  - informationsbasierte Strategien
  - Risikofähigkeit
- Arbitrage:
  - risikolose Gewinne ohne Kapitaleinsatz

Durch Hedging können Akteure Risiken, die sie nicht selbst tragen wollen, an Spekulanten abtreten. Die Spekulanten wiederum erhoffen sich entweder durch einen Informationsvorsprung oder durch Risikofähigkeit (im Prinzip das Gesetz der grossen Zahlen) eine Überrendite zu erwirtschaften. Arbitrageure schliesslich sorgen für einen effektiven Preismechanismus.

Die Interaktion dieser drei Aktivitäten ist eine Grundvoraussetzung für das Verständnis der Derivatmärkte und das Pricing der Derivate.
0

1 Klassifikation

Derivate gliedern sich nach zwei Kriterien in vier Gruppen. Einerseits nach ihrem Payoff-Schema (bedingte Payoffs vs. unbedingte Payoffs), andererseits nach ihrer Handelbarkeit (traded vs. OTC).

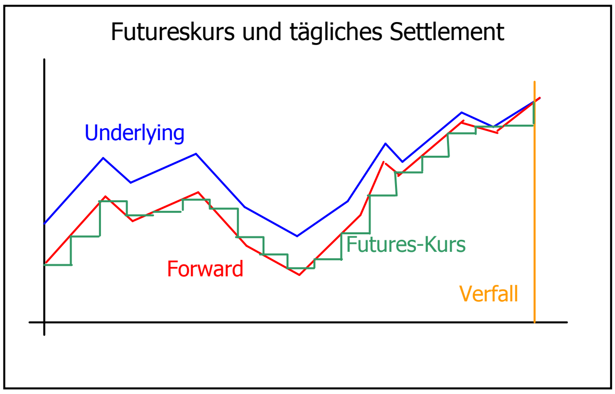
1.1 Handelbarkeit

Börsengehandelte Derivate werden als "traded" bezeichnet. Ein traded Derivat wird an einer spezialisierten Derivatbörse gehandelt. In diesen Derivatmärkten sind die Kontrakte hoch standardisiert. Die ältesten traded Derivate sind Futures. Die erste Futuresbörse, das Chicago Board of Trade CBOT, wurde 1848 gegründet, um Farmer und Getreidehändler zusammenzubringen. Weitere wichtige Derivatbörsen sind (auszugsweise):

(D/CH)	EUREX	
(F)	MATIF	Marché A Terme d'Instruments Financiers
(GB u.a.)	LIFFE	London International Financial Futures and Option Exchange
(US)	CBOT	Chicago Board of Trade
(US)	CME	Chicago Mercantile Exchange
(US)	CBOE	Chicago Board Options Exchange

Die CBOE nahm im Jahre 1973 den Handel mit Call Optionen auf 16 Aktien auf. Put Optionen wurde erstmals im Jahre 1977 gehandelt. Heute werden an der CBOE Optionen auf mehr als 1200 Titel gehandelt.

Bis vor wenigen Jahren wurde der gesamte Derivathandel ausschliesslich "à la crier" abgewickelt, also im Ringhandel. Nach und nach werden jetzt aber alle Derivatbörsen (wie die üblichen Börsen auch) auf elektronischen Handel umgestellt.



Um die notwendigen Eigenschaften eines traded Derivates zu begreifen, sei hier ein Futureskontrakt als typisches Beispiel für ein traded Derivat gezeigt. Ein Futures ist ein börsengehandeltes Termingeschäft.

- Es findet eine tägliche Neuberwertung der Kontrakte statt mit ebenfalls täglichen Gutschriften / Belastungen (Daily Settlement). Am Schluss des Handelstages gibt es keine offenen Positionen!
- Um diese Verbuchung zu gewährleisten, laufen alle Settlements über das Clearing House der Börse. Die Börse ist *immer* Gegenpartei (sowohl juristisch als auch ökonomisch / praktisch).
- Im Clearing House werden Konti der "direct clearing members" geführt. Sicherheiten müssen in form von Margins[1] geleistet werden.

[1] Futures weisen oftmals hohe Leverages auf (durch grosse Kontraktgrössen). Durch das tägliche Settlement können massive Belastungen der Marginkonten auftreten. Wenn die geleisteten Sicherheiten nicht mehr ausreichen, ergeht ein sogenannter Margin Call, der Aufruf an das Clearing Member, Sicherheiten

- Der Ausgleich des Orderbooks erfolgt über Marketmakers, die eine kontinuierliche Preisstellung und eine minimale Liquidität garantieren sollen[2].

Das Hauptmerkmal aller traded Derivate ist ihre sehr hohe Standardisierung, um so eine ausreichende Liquidität sicherzustellen. Futureskontrakte sind standardisiert bezüglich:

- Underlying (Basisanlage)
- Round Lot (Kontraktgrösse, typischerweise sehr gross)
- Expiry (Verfallszeitpunkt resp. Restlaufzeit)
- Laufzeit (1, 3, 6, 12 Monate)
- Strike (Ausübungspreis bei Optionen)

Dadurch erhält ein traded Derivat gewisse wünschbare Eigenschaften, die OTC Derivaten als Nachteil anhaften:

- Reduziertes Liquiditäts- und Gegenparteirisiko
  Gegenpartei ist die Börse, eine Institution mit hoher Kreditwürdigkeit.
- Erhöhte Transparenz
  Der Handel ist hocheffizient organisiert.
- Minimale Liquidität garantiert
  Durch die Market Makers ist (zumindest in der Theorie) eine minimale Liquidität garantiert; in extremem Marktumfeld (e.g. 11. Sep. 2001) kann das System aber versagen.
- Produktsicherheit erhöht
- Schnelle Transaktionen möglich

Neben diesen Risikoeffekten müssen bei der Auswahl des Instruments auch folgende Fragen bedacht werden:

- ist eine physische Transaktion des Underlyings am Ende der Laufzeit erwünscht?
  (traded Derivate → Cash Settlement)
- muss der Zeithorizont der Anlage variabel sein?
  (fix → OTC / variabel → traded; wohl der Hauptgrund für die Verwendung von traded Derivaten)
- Pricing
  (das höhere Risiko von OTC Derivaten geht ins Pricing ein)

Der OTC Handel ist einfacher zu verstehen. OTC heisst "over the counter" (über den Bankschalter). Im OTC Handel wird eine sehr viel breitere Produktpalette angeboten, praktisch jede Finanzinstitut offeriert eigene OTC Instrumente für die unterschiedlichsten Risikoreallokationsbedürfnisse, und für grosse Kunden sind sogar sogenannte taylormade Lösungen (massgeschneiderte Produkte) erhältlich. Das Handelsvolumen im OTC Markt ist um ein vielfaches Grösser als im traded Derivat Markt.

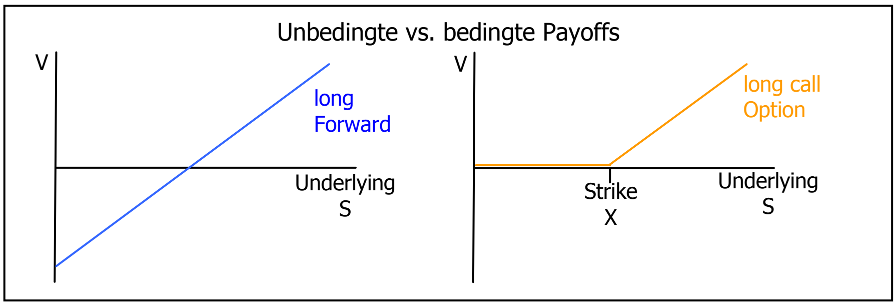
1.2 Payoffs

Derivate weisen entweder einen bedingten oder unbedingten Payoff aus. Typische Vertreter von bedingten Payoffs sind Optionen, von unbedingten Payoffs Forwards.

nachzuschiessen, oftmals innerhalb sehr kurzer Frist, andernfalls wird die Position liquidiert. An amerikanischen Börsen sind bei grossen Überschreitungen Liquidationsfristen von 24 Stunden Usanz.

[2] In extremen Handelsumständen ist jedoch selbst im heutigen, sehr gut organisierten System eine Preisstellung kaum mehr garantiert: in London wurden am Nachtmittag des 11. Septembers 2001 nur noch von einer einzigen Bank Devisenoptionskurse gestellt (mit geradezu astronomischen Spreads).

Ein Forward (deutsch: Termingeschäft) ist das wohl einfachste Derivat: heute wird die beiderseitige Verpflichtung eingegangen, zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft ein bestimmtes Gut zu einem heute festgelegten Preis zu liefern oder zu übernehmen (zu kaufen oder zu verkaufen). Die Partei, die sich verpflichtet hat, in der Zukunft zu *kaufen* hat "einen Forward *gekauft*" und ist deshalb *"long"*.

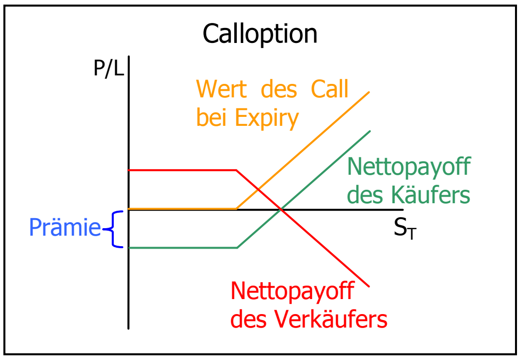


Ein Beispiel für ein Devisentermingeschäft:
A kauft von B heute 1 Million USD auf Termin drei Monate gegen CHF zum Kurs F. A verpflichtet sich also, in drei Monaten von heute an gerechnet von B 1 Million USD zu übernehmen und B dafür F CHF zu bezahlen, unabhängig vom in drei Monaten gültigen Tageskurs.

Typischerweise einen bedingten Payoff liefern Optionen. Die einfachsten Optionsformen sind Call- und Put- Optionen. Der *Käufer* einer

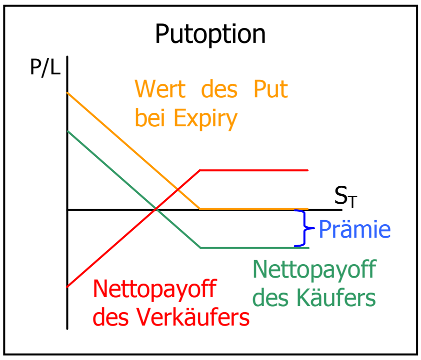
Calloption hat das Recht, aber nicht die Pflicht, ein bestimmtest Asset zu einem heute festgelegten Preis X (dem Strikepreis) bis oder zu einem festgelegten Zeitpunkt T (Expiry) zu kaufen.

Putoption hat das Recht, aber nicht die Pflicht, ein bestimmtest Asset zu einem heute festgelegten Preis X (dem Strikepreis) bis oder zu einem festgelegten Zeitpunkt T (Expiry) zu verkaufen.



Der Käufer einer Option kann also selbst bestimmen, ob er von seinem Recht Gebrauch machen will oder nicht. Er wird die Option dann ausüben, wenn der Marktpreis über (Call) bzw. unter (Put) dem Strikepreis liegt. Anders der Verkäufer: er verpflichtet sich, die Option zu erfüllen, wenn der Käufer dies verlangt. Für dieses Risiko wird der Verkäufer der Option bei Abschluss des Geschäftes mit einer Prämie entschädigt.

Die Payoff-Struktur von Optionen wird oft in sogenannten Payoff- oder Profit/Loss (P/L) Diagrammen dargestellt. Diese Diagramme weisen allerdings eine methodische Schwäche auf, wenn Prämien eingetragen werden (wie in nebenstehendem Beispiel), weil Prämien zu Beginn der Laufzeit gezahlt werden, die Auszahlung der Option aber erst bei Ausübung erfolgt. Die Darstellung vernachlässigt also den Zeitwert der Prämie.



Call- und Put sind offensichtlich in ihrer Payoffstruktur spiegelbildlich zueinander.

Call- und Putoptionen sowie daraus zusammengebaute Strategien werden als Plain Vanilla bezeichnet. Demgegenüber stehen die exotischen Optionen, die anders geartete Payoffstrukturen haben.

Mit Optionen lassen sich Termingeschäfte replizieren, Termingeschäfte sind also mit Optionen redundante Anlagen. Um einen long Forward zu replizieren, werden ein long Call und ein short Put zu Strike X = K gekauft. Wenn dies möglich ist (was vor allem von der "richtigen" Bestimmung des K sodass f = 0 abhängt), existiert eine short Put Option, die den gleichen Wert hat wie eine long Call Option. Es muss also gelten, dass:

$$P - C = 0 \qquad \text{für } X = K, \text{ sodass } f = 0$$

$$\rightarrow \qquad P(X = K) = C(X = K)$$

Dieser Zusammenhang wird als *Put-Call-Parität* bezeichnet.

2 Forwards und Futures Pricing

2.1 Grundlagen

Der Käufer eines Forwards (long forward) verpflichtet sich, ein bestimmtes Asset zum Zeitpunkt T zu einem heute abgemachten Kurs $K_{0,T}$ zu kaufen. Je nach dem zum Verfallszeitpunkt geltenden Kurs des Underlyings S_T weist der Kontrakt dann einen positiven oder negativen Wert auf: wenn $S_T > K_{0,T}$ ist der Wert des Forward positiv, im umgekehrten Fall negativ. Der Wert des Forwards bei Verfall berechnet sich also:

$$f_T = S_T - K_{0,T}$$

Der Wert des Forwards heute berechnet sich:

$$f_0 = S_0 - K_{0,T} \cdot e^{-rT}$$

Dies ist nichts einfach der Barwert des Kontraktes. Es wird ersichtlich, dass der Forward nichts anderes ist als ein in die Zukunft verlagertes Spotgeschäft.

Grundsätzlich kann K frei gewählt werden, es ist jedoch Usanz, dass ein Termingeschäft bei Abschluss keinen Wert besitzt (damit bei Abschluss keine Zahlungen fällig sind), dass also $f_0 = 0$. Somit ist $K_{0,T}$ festgelegt:

$$K_{0,T}^* = S_0 \cdot e^{+rT} \equiv F_{0,T}$$

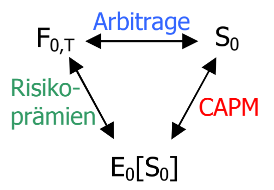
Diese Beziehung wird durch Arbitragemechanismen jederzeit gewährleistet, man spricht deshalb von Spot-Forward-Parität. Wenn der Forwardkurs vom technisch richtigen Wert abweicht, kann ein Arbitragegewinn realisiert werden, durch synthetische Replikation des Termingeschäfts.

Arbitragetableau: sei heute $S_0 = 1000$, $F_{0,T} < S_0 \cdot e^{rT}$; $F_{0,T}$ sei 1030, r=5%, T=1

Position	heute		Verfall					
			S_T:	800	900	1000	1100	1200
long Forward	–	0	$S_T - F_{0,T}$	-1030	-1030	-1030	1030	-1030
short Aktie	$+S_0$	+1000	$-S_T$	-800	-900	-1000	-1100	-1200
long Anlage	$-S_0$	-1000	$S_0\, e^{rT}$	+1051	+1051	+1051	+1051	+1051
Summe	–	0		+21	+21	+21	+21	+21

Die Kombination short Aktie + long Anlage entspricht einem short Forward. Es werden also zwei gegensätzliche Geschäfte abgeschlossen, die sich bei Verfall gegenseitig aufheben. Aus diesem Geschäft resultiert aber ein Gewinn von +21 in jedem Zustand.

Spot, Forward und Erwartungswert



Diese Arbitragemöglichkeit verschwindet genau dann, wenn $F_{0,T} = 1051$, wenn der Terminkurs also "richtig" ist. Man spricht dann vom arbitragefreien Terminkurs (immer unter der Annahme, dass S_0 richtig ist).

Die Beziehung zwischen Spot und Erwartetem Spot ist bei allen Anlagen problematisch, die keine fest definierte Laufzeit haben (z.B. Aktien). In diesem Fall kann diese Bedingung Bubbles begründen.

Die Beziehung zwischen Forward und Erwartetem Spotpreis ist keine Arbitragebeziehung, sondern sie setzt die Gültigkeit eines Bewertungsmodells voraus. Diese Beziehung macht eine Aussage über die Informationsverarbeitung.

$$F_{0,T} = E[S_T]\, e^{-rp \cdot T} \qquad \text{mit } rp = \text{Risikoprämie.}$$

Wenn $rp > 0 \rightarrow F_{0,T} < E[S_T]$

Daraus folgt, dass im Durchschnitt ein Gewinn erzielt, wer systematisch auf Termin kauft (Spekulanten). Die Gegenseite (Hedger) wollen im Durchschnitt auf Termin verkaufen und ist bereit, dafür eine Risikoprämie zu entrichten. Im Aggregat besteht also ein Risikoüberhang bei fallenden Kursen. Man spricht von "positivem Endowment Risk". Es besteht eine Hedging Pressure von Anbieterseite (normal backwardation). Aktienmärkte weisen zumeist normal backwardation auf.

Im Gegensatz dazu gibt es Märkte, in denen (normal) contango vorherrscht. In diesem Fall ist die Risikoprämie negativ. Um im Schnitt einen Gewinn zu erzielen, muss der Spekulant systematisch auf Termin verkaufen. Es existiert ein aggregiertes Risiko bei steigenden Kursen. Die Hedging Pressure kommt von den Nachfragern.

Im Grenzfall ist $F_{0,T} = E_0[S_T]$, also $rp = 0$. In einem solchen Markt werden keine Risikoprämien auf Termingeschäfte gezahlt. Es sind keine Spekulanten im Markt vertreten, weil die Hedgers unter sich markträumend sind.

2.2 Kausalität

Die klassische Finanzmarkttheorie postuliert die Abhängigkeit $F_{0,T} = S_0\, e^{rT}$ und meint:

$$F_{0,T} \xleftarrow{\text{beeinflusst}} S_0\, e^{rT}$$

Die Gleichung selbst sagt aber a priori nichts über die Richtung der Beeinflussung aus, in der Praxis wäre also genauso möglich:

$$F_{0,T} \xrightarrow{\text{beeinflusst}} S_0\, e^{rT}$$

In welche Richtung die Abhängigkeit wirkt, hängt von der Informationsverarbeitung in bzw. dem Informationsfluss zwischen den Märkten ab. Bei Aktienindizes laufen die Futures dem Underlying systematisch voraus. Grundsätzlich fliesst die Information immer vom liquideren Markt zum weniger liquiden Markt.

2.3 Modifikationen

Der Prototyp der Futurespreisberechnung erfolgt nach der Formel:

$$F_{0,T} = S_0\, e^{rT}$$

Für Assets, die einen mehr oder weniger gleichmässigen Cashflow auszahlen:

$$F_{0,T} = S_0\, e^{(r-\delta)T}$$ mit δ = Dividendenrendite

Darunter zählen insbesondere Aktienportfeuilles / Indizes aus Titeln, die ihre Dividenden ungefähr gleichmässig über das Jahr verteilt auszahlen. Falls es nur wenige Dividendentermine gibt oder aus anderen Gründen nicht von einem konstanten Dividendenstrom ausgegangen werden kann, gilt die Formel:

$$F_{0,T} = S_0 e^{rT} - \sum_{t=0}^{T} D_t e^{-rt}$$ mit D_t = Dividendenzahlung in Periode t

Commoditypreise unterscheiden sich in zwei wichtigen Punkten von "normalen" Finanzassets: sie verursachen einerseits beträchtliche Lagerkosten, können aber andererseits ganz direkt Nutzen für den Benutzer stiften:

$$F_{0,T} = S_0\, e^{(r+u-y)T}$$ mit u = proportionale Lagerkosten
mit y = convenience yield

Der Convenience Yield ist der Vorteil, der aus der Lagerhaltung gewonnen wird: Heizoel kann auch als Heizmaterial oder zum Betreiben von Maschinen verwendet werden, wenn es nicht auf dem Markt veräussert wird, Gold kann zu Schmuck oder Zahnfüllungen geformt und verkauft werden. Lagerbestände bilden zudem eine Absicherung gegen Lieferengpässe. Der Convenience Yield lässt sich deshalb auffassen als "Marktwert der Sofortigkeit" oder "immediacy".

2.4 Abgrenzung Futures vs. Forwards

Es lässt sich zeigen, dass der Preis eines Forward mit Expiry zu einem bestimmten Datum dann mit einem Futures Kontrakt auf gleichen Expiry übereinstimmt, wenn der risikolose Zins über die Zeit konstant ist und eine flache Zinsstruktur (gleicher Zinssatz für alle Maturitäten) vorliegt.

Wenn die Zinsen hingegen nicht konstant sind, ergibt sich für den Besitzer eines Futureskontraktes mit täglichem Settlement ein Vorteil durch die meist positive Korrelation des Zinslevels mit dem Aktienkurslevel (wenn die Aktienkurse steigen, tendieren Zinsen nach oben, wenn die Kurse fallen, folgen oft Zinssenkungen). Ein Investor besitze einen Futures, dessen Kurs hoch positiv mit dem Zinslevel korreliert ist. Er profitiert durch das tägliche Settlement sofort von steigenden Aktienkursen. Seinen verbuchten Gewinn kann er sofort zu einem höheren Zinsen reinvestieren. Umgekehrt kann er bei fallenden Kursen sich zu einem tieferen Zinssatz refinanzieren.

Wenn ein Asset also eine hohe Korrelation zum Zinsniveau aufweist, liegt der Futurespreis höher als der Forwardpreis, wenn eine stark negative Korrelation vorliegt, gilt das umgekehrte Argument.

In der Praxis gibt es eine Anzahl Faktoren, die nicht durch die theoretischen Modelle abgebildet werden und die zu einer Differenz von Forward und Furturespreisen führen können, so zum Beispiel Steuern, Transaktionskosten und Margins. Futures weisen ein tieferes Default- bzw. Gegenparteirisiko auf. Futures und Forwards können eine unterschiedliche Liquidität aufweisen. Trotz (oder wegen) diesen unterschiedlichen Preiseffekte ist es oft vertretbar anzunehmen, dass Forward und Futurespreise gleich sind.

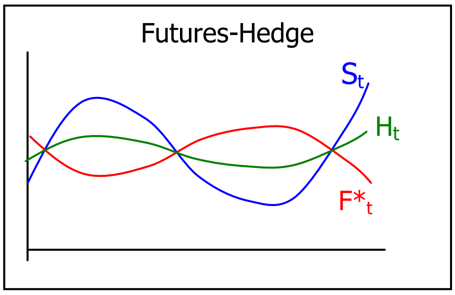
Zwei Argumente sprechen aber gegen diese Annahme:

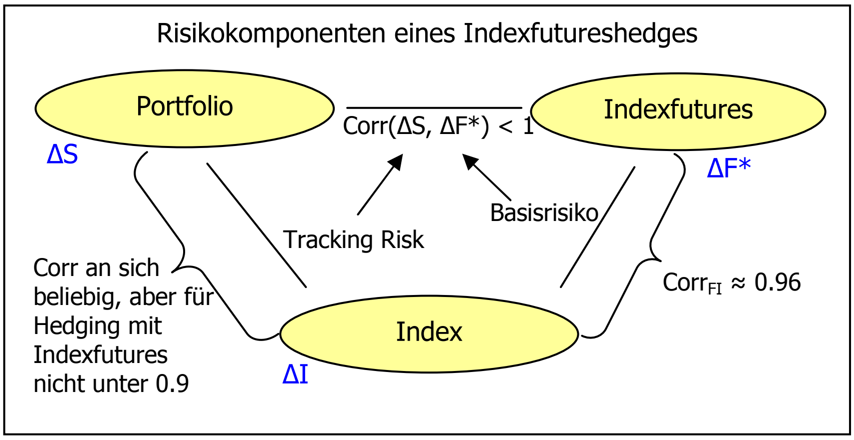
1.) Die meisten Instrumente weisen eine umgekehrte Korrelation zwischen Asset und Zinsniveau auf: Corr(ΔM, Δi) < 0. Daraus folgt für Aktien, dass $F^* < F$.
2.) Zinsen sind in der Realität nicht konstant.

Zu einer Abweichung kommt es, wenn (d.h.: weil) Δi stochastisch ist. Die Höhe der Abweichung ist dann von der Varianz von Δi abhängig. Das ist besonders im Risikomanagement wichtig: in zinsvolatilen Phasen kann eine Diskrepanz zwischen F und F* entstehen, was ein Basisrisiko impliziert, das gerade im kritischen Moment auf den Hedge durchschlägt (denn für allgemeine Phasen wird nicht gehedget.)

3 Hedging mit Futures

Futures werden oft verwendet, um Kursschwankungen zu neutralisieren, indem eine Futuresposition aufgebaut wird, die den umgekehrten Payoff des Portfolios aufweist. Im Allgemeinen ist es jedoch nicht möglich, den Hedge so zu gestalten, dass er den Payoff des Portfolios exakt repliziert (mit umgekehrtem Vorzeichen). Dies aus zwei Gründen. Erstens existieren keine Futures auf Einzeltitel, sondern nur auf Indizes (der Unterschied zwischen Portfolio und Index wird als Tracking Risk bezeichnet), zweitens entwickelt sich der Indexfutures nicht vollkommen parallel zum zugrundeliegenden Index (der Unterschied zwischen Index und Indexfutures wird Basisrisiko genannt).





Die beste mögliche Strategie ist es also, die Varianz der Gesamtposition ΔH zu minimieren. Hierbei handelt es sich um eine Mean-Variance-Problemstellung:

$$\min_n \operatorname{var}(\Delta H) = MVH$$

$$\Delta H = \Delta S + n \cdot \Delta F^*$$

Führt zu: $$n^* = -\frac{\operatorname{cov}(\Delta S, \Delta F^*)}{\operatorname{var}(\Delta F^*)} = -\beta_{SF} \cdot \frac{S}{F}$$

Aus der Portfoliotheorie ist bekannt, dass sich Hedging das Risiko im allgemeinen nicht vollständig eliminieren lässt, er bleibt ein Restrisiko übrig:

$$\sigma_{\varepsilon} = \sigma_S \cdot \sqrt{1 - \mathrm{corr}^2_{S,F^*}}$$

Für eine Korrelation von 0.9 zwischen Futures und Portfolio (das bedeutet, das Portfolio gleicht weist nur ein geringes Tracking- und Basisrisiko auf) resultiert für ein optimal gehedgetes Portfolio (MVH) noch immer ein Risikoanteil von fast 44% Restrisiko, das sich nicht absichern lässt.

Weitere Probleme des Hedging mit Futures:
- Die Liquidität in den Futuresmärkten kann ungenügend sein und zu Verzerrungen führen (Basisrisiko!). Das ist vor allem in kleinen Indizes wie dem SMI ein Problem.
- Die Stabilität des β ist über den relevanten Absicherungszeitraum nicht garantiert, die Prognose des β schwierig. Anpassungen des Hedges sind notwendig, um eine dauerhafte Immunisierung zu erreichen.
- Sowohl das Portfolio als auch der Futures verändern sich laufend, der Hedge ist also eigentlich instabil.

4 Interest Rate Markets & Swaps

Der Terminkurs eines Futures rechnet sich nach der Formel:

$$F_{0,T} = S_0(1 + R)^T = S_0\, e^{rT} \quad \text{für } {}_0r_T = \ln(1 + {}_0R_T)$$

Es stellt sich die Frage, was für ein Zins gemeint ist: risikoloser Bond? Durchschnittszins aller Produkte einer Laufzeit? Es lässt sich zeigen, dass es sich dabei um eine Spot Rate handelt (also um die Rendite auf Verfall eines Zero Bonds).

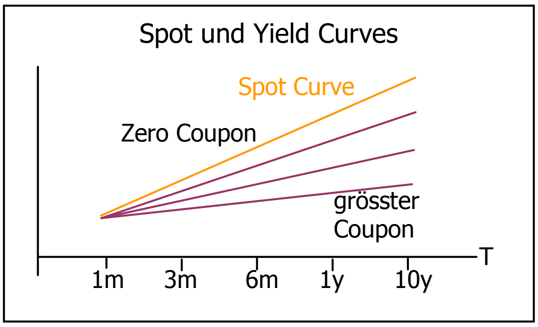
4.1 Yields, Yield und Spot Curve

Notiert werden Preise von Coupon Bonds für verschiedene Laufzeiten T:

$$P^T_{Coupon} = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+{}_0R_t)^t} + \frac{F}{(1+{}_0R_T)^T}$$

Wobei C der Couponbetrag und F das Nominal ist. Die Preise werden mit den "echten" Preisen aus der Term structure der heute gültigen Zinskurve berechnet. Demgegenüber steht das Mass der Yield to Maturity (Rendite auf Verfall) ytm. Mit der ytm wird eine Durchschnittsverzinsung angegeben, sodass

$$P^T_{Coupon} = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+ytm)^t} + \frac{F}{(1+ytm)^T}$$



Entscheidend ist, dass die ytm keinen Zeitindex mehr trägt, sich also nur noch auf den Zeitpunkt T bezieht. Es können nun ytm für unterschiedliche Laufzeiten berechnet und als Kurve in Abhängigkeit der Laufzeit aufgetragen werden. Es resultiert die Yield Curve, also die Renditestruktur im Bondmarkt. Aufgrund der Konstruktion gelten für die Yield Curve gewisse Annahmen: der Bond wird bis Maturity gehalten und Coupons können zu ytm reinvestiert werden.

Die Konstruktion der Spot Curve erfolgt analog zu den Yield Curves, allerdings sind hier (im Idealfall) die Preise von Zero Coupon Bonds der Ausgangspunkt. Preis und Rendite eines Zero Bonds berechnen sich nach den Formeln:

$$P_{Zero}^{T}=\frac{Face}{\left(1+{}_0R_T\right)^T} \qquad \text{und} \qquad {}_0R_T=\sqrt[T]{\frac{Face}{P_{Zero}^{T}}}-1$$

Die Spot Curve liegt immer über den Yield Curves, weil, wenn der Coupon hoch ist, schon früh Zahlungen zurück kommen, die anderweitig investiert werden können. Umgekehrt kann man bei einem Zero Coupon Bond nicht von Shifts in der Zinskurve profitieren, es gibt während der Laufzeit nichts zu reinvestieren.

In der Praxis sind Zero Coupon Bonds vor allem für längere Laufzeiten selten, es gibt aber immer einen (coupontragenden) Bond mit Verfall in T=1. Für einperiodige Bonds entspricht der Preis eines Couponbonds dem eines Zerocoupon Bonds (weil bis zum Verfall eh keine Coupons mehr ausbezahlt werden), sodass

$$P_{Coupon}^{1}=\frac{C+Face}{1+{}_0R_1}=\frac{C+Face}{1+ytm_1} \qquad \text{also:} \qquad {}_0R_1 = ytm_1$$

Die Rendite eines einperiodigen Bonds entspricht also gerade seinem yield to maturity. Nach diesem Ansatz lassen sich aus der Rendite über eine Periode und den (im Markt beobachteten) Bondpreisen die Renditen aller Folgeperioden inkrementell berechnen. Man spricht dabei von der Bootstrapping Methode.

gegeben P_C^1, P_C^2, ${}_0R_1 = ytm_1 \rightarrow {}_0R_2$, denn:

$$P_{Coupon}^{2}=\frac{C}{1+{}_0R_1}+\frac{C+F}{\left(1+{}_0R_2\right)^2}$$

wobei ${}_0R_2$ die einzige Unbekannte ist, sodass:

$${}_0R_2=\sqrt[T]{\frac{C+F}{P_{Coupon}^{2}-\frac{C}{1+{}_0R_1}}}-1 \qquad \text{Allgemein:} \qquad {}_0R_T=\sqrt[T]{\frac{C+F}{P_{Coupon}^{T}-\sum_{t=1}^{T}\frac{C}{\left(1+{}_0R_t\right)^t}}}-1$$

So entstehen Spot Rates für alle Laufzeiten. Diese Spot Rates sind für die Bewertung von Derivaten relevant.

4.2 Zinstermingeschäfte: Swaps und FRAs

4.2.1. FRAs

Das klassische Zinstermingeschäft ist das FRA (Forward Rate Agreement). Ein Investor will in t Jahren für (T-t) Jahre einen Kredit aufnehmen. Der dann gültige Zins soll aber heute schon festgelegt werden. Aus Arbitragegründen muss gelten:

$$K_T = K_0\left(1+{}_0R_T\right)^T = K_0\left(1+{}_0R_t\right)^t\left(1+{}_0F_{t,T}\right)^{T-t}$$

einmalige Anlage | Roll-over Strategie

Für den Terminzins ${}_0F_{t,T}$ folgt dann:

$${}_0F_{t,T} = \sqrt[T-t]{\frac{\left(1+{}_0R_T\right)^T}{\left(1+{}_0R_t\right)^t}}-1$$

Kapitalkosten der Bank

Rendite der Zwischeninvestition

Anhand der Spotrates (nach der Bootstrapping Methode bestimmt) lassen sich also beliebige Forward Rates berechnen.

4.2.1 Zinsswaps

Ein Zinsswap ist die Vereinbarung zweier Parteien über den Austausch von variablen (FLOAT) und fixen (FIX) Zinszahlungen. In der Regel wird das Nominal nicht getauscht. Der fixe Zinssatz wird als Swap Rate R_T bezeichnet. Eine notwendige Annahme für das Preismodell ist die Gültigkeit der "Erwartungstheorie der Zinsstruktur" (expectations theory):

$$E_0[{}_tR_T] = {}_0F_{t,T}$$

Dies folgt aus der Äquivalenz von Einmalanlage und Roll-over Strategie.

Zinsswaps gliedern sich in Payer und Receiver Swaps, wobei beim Payer Swap die long Partei FIX zahlt und FLOAT erhält und beim Receiver Swap die long Partei FIX erhält und FLOAT zahlt. Die Terminologie bezieht sich also auf den fixen Teil. Offensichtlich existieren bei Swaps keine short Parteien, weil long Receiver gerade short Payer entspricht.

Ähnlich wie bei einem Forward muss auch beim Swap bei Eröffnung der Marktwert Null sein. Es muss also gelten, dass zu t = 0 gilt:

PV(FLOAT) = PV(FIX)

Weiter müssen natürlich die Spotrates bekannt sein. Um die Notation zu vereinfachen, werden die Diskontfaktoren aus der Periode t durch die Variable d_t abgekürzt, also:

$$d_t = \frac{1}{\left(1+{}_0R_t\right)^t}$$

Die Bewertung eines Payer Swaps ist also entsprechend der Summe der diskontierten Zinszahlungen aus FLOAT.

Periode	Zinszahlung	Wert heute
1	${}_0R_1 \cdot Face = {}_0F_{0,1} \cdot Face$	${}_0F_{0,1} \cdot Face \cdot d_1$
2	${}_1R_2 \cdot Face = {}_0F_{1,2} \cdot Face$	${}_0F_{1,2} \cdot Face \cdot d_2$
3	${}_2R_3 \cdot Face = {}_0F_{2,3} \cdot Face$	${}_0F_{2,3} \cdot Face \cdot d_3$
...		
T	${}_0F_{T-1,T} \cdot Face$	${}_0F_{T-1,T} \cdot Face \cdot d_T$

Summiert:

$$PV(FLOAT) = Face\sum_{t=0}^{T-1} {}_0F_{t,t+1} \cdot d_{t+1}$$

Für FIX:

Periode	Zinszahlung	Wert heute
1	$R_T \cdot Face$	$R_T \cdot Face \cdot d_1$
2	$R_T \cdot Face$	$R_T \cdot Face \cdot d_2$
3	$R_T \cdot Face$	$R_T \cdot Face \cdot d_3$
...		
T	$R_T \cdot Face$	$R_T \cdot Face \cdot d_T$

Summiert:

$$PV(FIX) = Face \cdot R_T \cdot \sum_{t=1}^{T} d_t$$

Aus PV(FLOAT) = PV(FIX) folgt: $R_T = \dfrac{\sum_{t=0}^{T-1} {}_0F_{t,t+1} \cdot d_{t+1}}{\sum_{t=1}^{T} d_t}$

Für die Bewertung eines Swaps nach Eröffnung ist das Vorgehen grundsätzlich gleich, allerdings sind die PV von FLOAT und FIX nicht mehr gleich, sondern es gilt:

Payer Swap: PV(Payer) = PV(FLOAT) – PV(FIX)
Receiver Swap: PV(Receiver) = PV(FIX) – PV(FLOAT)

Wenn also die Zinsen steigen, wird der Payer Swap einen positiven Marktwert aufweisen, der Receiver Swap einen negativen Marktwert; umgekehrt, wenn die Zinsen sinken.

In der Praxis ist of auch die Fragestellung relevant, wie sich aus der beobachteten Fristenstruktur am Swapmarkt die Spotkurve bestimmen lässt:

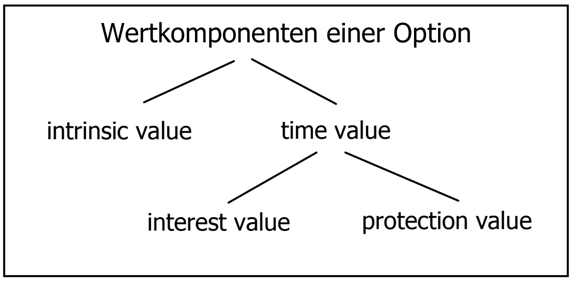
$$ {}_0R_T = \sqrt[T]{\frac{1+R_T}{1-\left(R_T - \sum_{t=1}^{T} d_t\right)^t}} - 1 $$

5 Handelsstrategien & verteilungsfreie Eigenschaften

5.1 Verteilungsfreie Eigenschaften von Optionen

5.1.1 Wertkomponenten und Put-Call-Parität

Verteilungsfreie Eigenschaften machen keine Annahmen über die stochastische Verteilung des Underlyings.



Der Wert einer europäischen Aktienoption ohne Dividendenzahlung setzt sich aus zwei Haupt- und zwei Unterkomponenten zusammen: dem intrinsischen (oder inneren) Wert der Option und deren Zeitwert, wobei sich der Zeitwert wiederum unterteilt in interest value und protection value.

Der innere Wert einer Option resultiert aus der Differenz zwischen Strikepreis und im Markt gültiger Aktienkurs. Für eine Call-Option spricht man von:

- "In the money", wenn S > X
- "at the money", wenn S = X
- "out of the money", wenn S < X

Der intrinsic value berechnet sich:

Call: intrinsic value = max(S – X; 0)
Put: intrinsic value = max(X – S; 0)

Der intrinsische Wert entspricht somit gerade dem Wert einer Option bei Verfall. Der Zeitwert einer Option entspricht dem Gewinnpotential der Option während ihrer Restlaufzeit. Er sinkt dementsprechend bei Verfall auf 0.

Der interest value einer Call Option ist der Zinsvorteil, weil die Aktie erst bei Expiry gekauft werden muss. Das heisst, dass bis zum Expiry der Option der Strikepreis risikolos angelegt werden kann. Umgekehrt folgt aus einer Put Option ein Zinsnachteil, weil das Kapital in der (dividendenlosen) Aktie gebunden ist.

Zinsvorteil Call: $X - PV(X) = X - Xe^{-rT}$
Zinsnachteil Put: $PV(X) - X = Xe^{-rT} - X$

Wohl die wichtigste Eigenschaft von Optionen ist ihr protection value. Im Gegensatz zu einer Forwardposition lässt sich das Kursrisiko nach einer Seite beschränken: ein Investor, der eine long Forwardposition hält, kann durch Kauf eines Put sein Downside Risiko ausschalten und seine Kursverluste damit auf die Putprämie beschränken – der Investor generiert somit einen synthetischen long Call.

Wenn alle Optionen fair gepreist sind, muss also die Putprämie, die an den Stillhalter der Putoption geht, gerade dem Versicherungswert der long Call Option entsprechen.

Zusammenfassend:

Call = Innerer Wert + Zinskomponente + Versicherungsprämie
$C \quad = \quad S - X \quad + \quad K - Xe^{-rT} \quad + \quad P$
$C = S - Xe^{-rT} + P$

Daraus folgt die Put-Call-Parität:

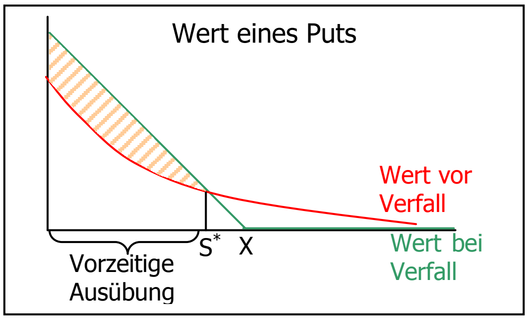
$$S + P = C + PV(X)$$

5.1.2 Preisobergrenzen einer Option

Hier muss zusätzlich zu Call und Put auch unterschieden werden zwischen amerikanisch und europäisch.

	europäisch	amerikanisch
Call	$C \leq S_0$	$C \leq S_0$
Put	$P \leq Xe^{-rT}$	$P \leq X$

- "Das Recht, eine Sache zu kaufen, ist niemals mehr Wert als die Sache selbst".
- "Das Recht, eine Sache zu verkaufen, ist niemals mehr Wert als der Strike Preis."



Die zweite Bedingung kann beim europäischen Put durchbrochen werden, weil er nicht vor Verfall ausgeübt werden kann. Anders der amerikanische Put. Wenn die Bedingung nicht mehr gilt, kann es optimal sein, den Put vorzeitig auszuüben.

5.1.3 Preisuntergrenzen einer Option

	europäisch	amerikanisch
Call	$C \geq \max[S_0 - Xe^{-rT}, 0]$	$C \geq \max[S_0 - X, 0]$
Put	$P \geq \max[Xe^{-rT} - S_0, 0]$	$C \geq \max[X - S_0, 0]$

Bsp:
$S_0 = 1000$ $T = 1$
$X = 900$ $r = 5\%$

$C_0 = 120$ sei "zu billig" (Ausübungswert: 1000 – 900 = 100).
PV(X) =

Arbitragetableau:

Position	heute	Expiry					
Kurs	1000	700	800	900	1000	1100	1200
long Call	-120	0	0	0	100	200	300
Replikation:							
long Aktie	-1000	700	800	900	1000	1100	1200
Kredit	856.11	-900	-900	-900	-900	-900	-900
Summe:	-143.89			0	100	200	300

Es kann also eine Arbitrageposition aufgebaut werden:
→ Kaufe das billigere Asset: long Call und repliziere die Gegenposition.

long Call: -120
short Aktie: 1000
Festgeld: -856.11
Summe: 22.85 (Arbitragegewinn)

5.1.4 Kontraktschutz bei technischen Kurskorrekturen

Weil Optionen nicht dividendengeschützt sind, müssen allfällige Dividendenzahlungen in die Preisberechnung mit einbezogen werden (Optionäre haben kein Recht auf Dividendenzahlungen). Für die Preisuntergrenzen der Optionen ergeben sich dann:

amerikanisch:

$$C \geq S_0 - Xe^{-rT} - PV(D)$$
$$P \geq PV(X) + PV(D) - S_0$$

europäisch:

$$C \geq \max [S_0 - PV(X) - PV(D); 0]$$
$$P \geq \max [PV(X) + PV(D) - S_0; 0]$$

PV(D) ist der Barwert der Dividendenzahlung vom Zeitpunkt der Dividendenzahlung zum Zeitpunkt der Prämienzahlung abdiskontiert.

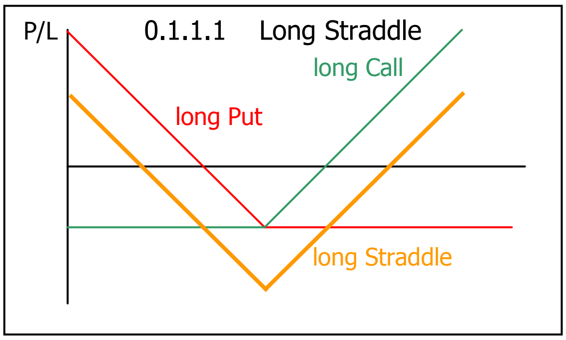
Bei Aktiensplits hingegen werden ausstehende Optionskontrakte automatisch angepasst. Es werde zum Beispiel eine Aktie im Verhältnis 1:10 gesplitet (für eine alte Aktie erhält man 10 neue → $\alpha = 0.1$). Der ursprüngliche Kurs sei $S_0 = 1000$, ausstehend seien $n = 10$ Optionen mit Strike $X = 900$.

vor Split $S_0 = 1000$ $X = 900, n = 10$

nach Split $S' = 100$ $X' = 90, n' = 100$

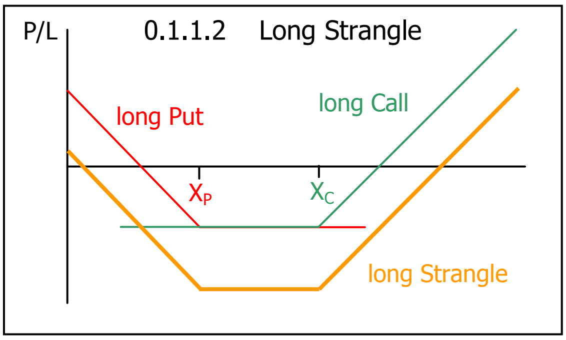
5.2 Grundlegende Tradingstrategien

Die hier dargestellten Tradingstrategien sind sehr einfach, sie setzen sich nur aus Calls und Puts zusammen (sogenannte Plain Vanilla Optionen). Man spricht deshalb auch von Plain Vanilla Strategien.



Straddle:
Komponenten: 1 long Call + 1 long Put
Strikes: gleiche Strikes für Call und Put
Martkerwartung: hohe Volatilität

Der Straddle kann auch in einer short-Variante implementiert werden (short Call + short Put). Der Investor erwartet in diesem Fall eine geringe Volatilität.



Strangle:
Komponenten: 1 long Call + 1 long Put
Strikes: Strike Put X_P < Strik Call X_C
Markterwartung: hohe Volatilität

Der Strangle kann auch in einer short-Variante implementiert werden. Der Strangle ist billiger als der Straddle, dafür muss der Aktienkurs stärker schwanken, um in die Gewinnzone zu gelangen.

Sowohl Straddle wie auch Strangle handeln ausschliesslich Volatilität, ohne eine bestimmte Bewegungsrichtung vorzuziehen.

Simple Spreads:
Es gibt drei Arten von Simple Spreads: vertikale, horizontale und diagonale Spreads. Eine spezielle Form des Spreads ist der Butterfly. Dieser wird separat behandelt. Ein Spread besteht (im Unterschied zu Straddles und Strangles) entweder nur aus Calls oder nur aus Puts. Es gibt bei Spreads keine Unterscheidung in long und short Positionen, sondern in Bullish (erwartet eine Aufwärtsbewegung des Underlyings) und Bearish Spreads (erwartet eine Abwärtsbewegung).

Optionsserien

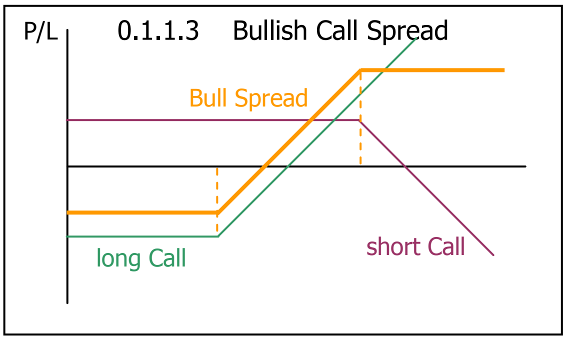
CALL	MAY	JUNE	JULY
X_1	A	C	
X_2	B		
X_3			

vertikal Spread: long A, short B
horzontal Spread: long A, short C
diagonal Spread: long B, short C

Vertikale Spreads handeln zwei Optionen mit gleicher Laufzeit, aber unterschiedlichen Strikes. Vertikale Spreads sind am weitesten verbreitet.

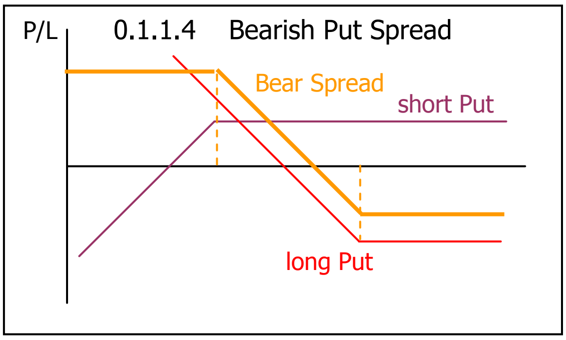
Horizontale Spreads handeln zwei Optionen mit gleichem Strike, aber unterschiedlicher Laufzeit.

Diagonale Spreads handeln zwei Optionen mit unterschiedlichem Strike und unterschiedlichem Verfallszeitpunkt.



Bullish Call Spread:
Komponenten: 1 long Call + 1 short Call
Strikes: long Call Strike X_L, short Call Strike X_H
$X_L < X_H$
Markterwartung: steigende Kurse

Der Spread kann auch mit Puts realisiert werden.



Bearish Put Spread:
Komponenten: 1 short Put + 1 long Put
Strikes: short Put Strike X_L, long Put Strike X_H
$X_L < X_H$
Markterwartung: fallende Kurse

Der Spread kann auch mit Calls realisiert werden.

Wenn es ein Mispricing in den Optionskontrakten gibt, so bieten (vertikale) Spreads die Möglichkeit, Arbitragegewinne abzuschöpfen.

Bsp:

Strike:	Optionspreis (Calls mit unterschiedlichem Strike, aber gleichem Expiry)
X_1 = 900	$C(X_1)$ = 160 } 110 → kann nicht sein → Mispricing
X_2 = 1000	$C(X_2)$ = 50
X_3 = 1100	$C(X_3)$ = 10

Entweder ist $C(X_1)$ zu teuer oder $C(X_2)$ zu billig. Das bietet Arbitragemöglichkeiten über einen vertikalen Spread (Verkauf des zu teuren und Kauf des zu billigen Assets):

Payofftableau eines vertikalen Spreads (short $C(X_1)$, long $C(X_2)$)

Heute			**Verfall**				
			800	900	1000	1100	1200
short $C(X_1)$	+ 160		0	0	0	100	200
long $C(X_2)$	– 50		0	0	– 100	– 200	– 300
Summe	**+ 110**		**0**	**0**	**– 100**	**– 100**	**– 100**

→ Arbitragegewinn von +10 (ohne Berücksichtigung des Zeitwerts / R = 0%)

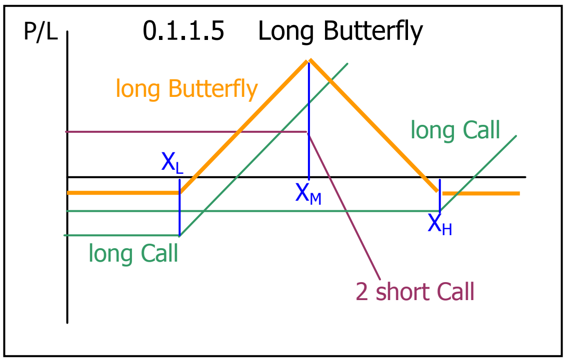
Der Arbitragegewinn verschwindet dann, wenn die Differenz der Callpreise gleich oder kleiner ist als die Differenz der Strikepreise, wenn also gilt:

$$| C(X_1) - C(X_2) | < | X_1 - X_2 |$$

bzw:

$$| C(X_1) - C(X_2) | < | PV(X_1 - X_2) |$$ unter Berücksichtigung des Zeitwerts.

Butterfly Spreads:
Auch der Butterfly Spread besteht nur aus Calls oder nur aus Puts, allerdings werden 4 Kontrakte benötigt, um 1 Butterfly zu replizieren.



Long Butterfly:
Komponentten und Strikes: 1 long Call Strike X_L, 2 short Calls Strike X_M, 1 long Call Strike X_H.
$X_L < X_M < X_H$
Markterwartung: Zustandsanlage (geringe Vola)

Der Butterfly kann auch als short konzipiert werden, wobei dann die "Spitze" nach unten weist.

Mit dem Butterfly Spread lässt sich eine sogenannte Zustandsanlage generieren. Eine Zustandsanlage liefert nur zu einem ganz bestimmten Strike einen Payoff, sonst 0.

Bsp:

Strike: Optionspreis (Calls mit unterschiedlichem Strike, aber gleichem Expiry)
$X_1 = 900$ $C(X_1) = 160$
$X_2 = 1000$ $C(X_2) = 100$ $C(X_2)$ sei zu teuer → long Butterfly
$X_3 = 1100$ $C(X_3) = 10$

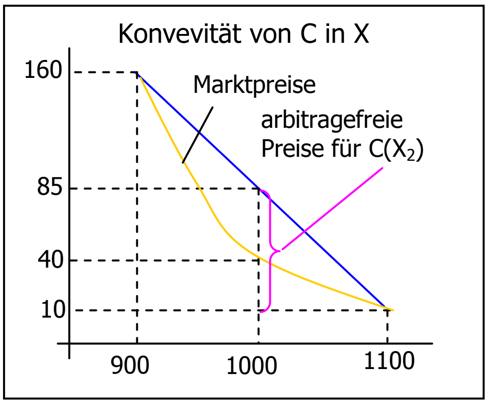
Payofftableau eines Long Butterflys (mit Arbitrage)

Heute			**Verfall**				
			800	900	1000	1100	1200
long $C(X_1)$	– 160		0	0	100	200	300
2 short $C(X_2)$	+ 200		0	0	0	– 200	– 400
long $C(X_3)$	– 10		0	0	0	0	100
Summe	**+ 30**		**0**	**0**	**100**	**0**	**0**

Diese Butterfly entspricht also einer Anlage, die nur bei $S_T = 1000$ einen Payoff liefert, sonst nichts. Man spricht in diesem Fall von einer Zustandsanlage (State Security) oder Arrow-Debreu Anlage.

Um die Arbitragefreiheit der Optionspreise zu gewährleisten, muss $C(X_2) < 85$ sein. Dieser Preis ist intuitiv, weil 85 das arithmetische Mittel von 10 und 160 darstellt. Daraus folgt, dass mit zwei gegebenen Optionspreisen alle anderen Optionspreise (bzw. deren Obergrenze) in diesem Intervall bestimmt sind.

Real beobachtete Optionspreise weisen eine gewisse Konvexität auf, das heisst der Call mit Strike X_2 = 1000 wird nie im Markt zu 85 gehandelt, sondern (aufgrund des Volatilitätswertes) mit einem gewissen Abschlag, sodass sich eine konvexe Preisstruktur der Optionen ergibt.



Für ein stetiges X muss also gelten:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial X} > 0$$

6 Binomiale Bewertung

6.1 Bewertung von Arrow-Debreu Anlagen

Mit den aus der Butterflybewertung gewonnenen Erkenntnissen lassen sich nun allgemeine Arrow-Debreu Anlagen (Zustandsanlagen) bewerten. Der Preis eines Butterfly Spread gliedert sich in zwei Callpreis-Differenzen, deren nochmalige Differenz den Zustandpreis angibt:

$$\begin{aligned} \text{Butterfly:}\quad & C(X_1) - C(X_2) - C(X_2) + C(X_3) \\ &= C(X_1) - C(X_2) - [C(X_2) - C(X_3)] \\ &= \Delta C_1 \qquad - \qquad \Delta C_2 \end{aligned}$$

$$= \qquad \Delta(\Delta C)$$

Im Zahlenbeispiel:

$X_1 = 900$ $\qquad C(X_1) = 160$

$\qquad \Delta C_1 = 80$

$X_2 = 1000$ $\qquad C(X_1) = 80$ $\qquad \Delta(\Delta C) = 10$

$\qquad \Delta C_2 = 70$

$X_3 = 1100$ $\qquad C(X_1) = 10$

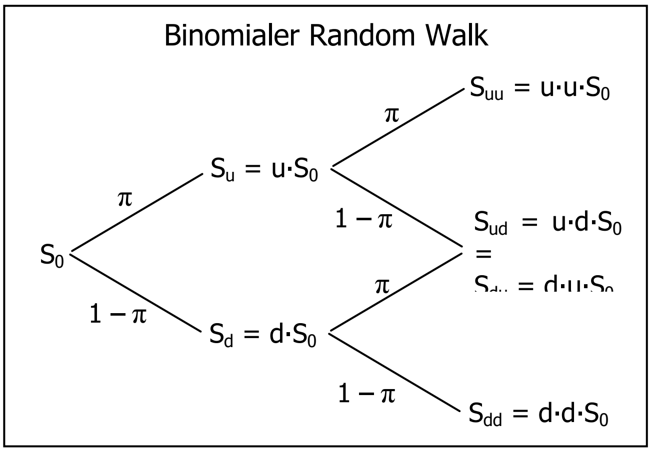
Mit dem Preis, den der Butterfly Spread (hier bei diskreten Aktienkursen) heute kostet, lässt sich also ein zustandsabhängiger, späterer Payoff bewerten.

Werden mehr Strike Preise einbezogen, ergibt sich:

X	C	ΔC	Δ(ΔC)
800	175		
		90	
900	85		40
		50	
1000	35		30
		20	
1100	15		10
		10	
1200	5		

Zustandpreise

6.2 Annahmen und Grundlagen



Alle bisher genannten Eigenschaften von Optionspreisen setzten keine Annahmen zur Stochastik der Basisanlage voraus. Neu wird diese Annahme ausdrücklich getroffen: die Basisanlage folge einem binomialen Random Walk Prozess mit geschlossener Baumstruktur (recombining tree).

Annahmen:
i) u,d sind konstant
ii) π ist konstant

Die Wahrscheinlichkeit für ein up/down-Ereignis ist also unabhängig von den vorhergehenden Realisationen des Prozesses. Der Prozess hat "kein Gedächtnis".

Die Grundlage zur Bewertung einer Option liefert zuerst eine (statische) Replikation der Option. Im folgenden 1-Perioden Beispiel wird eine solche Replikation illustriert. Es soll eine Call Option auf eine (1) Aktie bewertet werden. Der risikolose Zinssatz betrage R=5%. Der Aktienkurs heute sei 100, er kann aber bis in einer Periode entweder auf 120 ansteigen oder auf 80 absinken (u = 1.2, d = 0.8). Der Strike des Calls laute auf X = 110.

Die Replikationsbedingung lautet, dass der Payoff des Calls in beiden Zuständen einer Kombination von Aktien- und Bondanlage entsprechen muss. In Formeln:

$$\left| \begin{array}{l} C[u] = \Delta \cdot S_0 \cdot u + B(1+R) \\ C[d] = \Delta \cdot S_0 \cdot d + B(1+R) \end{array} \right.$$

Es ist:

C[u], C[d]	der Payoff der Option im Up- bzw. Downzustand
Δ	die Anzahl an Aktien, die für die Replikation 1 Option notwendig sind
u, d	die Up- bzw. Down-Faktoren (Aktienkurs-Faktoren)
S_0	der Aktienkurs heute
B	der Betrag, der in Bonds angelegt werden muss
R	der einfache Zins über 1 Periode

Es ergibt sich ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten (Δ, B), das mit der Cramerschen Regel zu lösen ist.

$$\Delta = \frac{\begin{vmatrix} C[u] & (1+R) \\ C[d] & (1+R) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 \cdot u & (1+R) \\ S_0 \cdot d & (1+R) \end{vmatrix}} = \frac{C[u] \cdot (1+R) - C[d] \cdot (1+R)}{S_0 \cdot u \cdot (1+R) - S_0 \cdot d \cdot (1+R)} = \frac{C[u] - C[d]}{S_0 \cdot u - S_0 \cdot d}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} S_0 \cdot u & C[u] \\ S_0 \cdot d & C[d] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_0 \cdot u & (1+R) \\ S_0 \cdot d & (1+R) \end{vmatrix}} = \frac{S_0 \cdot u \cdot C[d] - S_0 \cdot d \cdot C[u]}{S_0 \cdot u \cdot (1+R) - S_0 \cdot d \cdot (1+R)} = \frac{u \cdot C[d] - d \cdot C[u]}{u \cdot (1+R) - d \cdot (1+R)}$$

Im Zahlenbeispiel:

$$\Delta = \frac{10 - 0}{(100 \cdot 1.2) - (100 \cdot 0.8)} = 0.25$$

$$B = \frac{(1.2 \cdot 0) - (0.8 \cdot 10)}{(1.2 \cdot 1.05) - (0.8 \cdot 1.05)} = \frac{-8}{1.26 - 0.84} = -19.048$$

Der Eigenkapitalbedarf der Replikation heute impliziert den Preis der Option. Es gilt die Regel, dass der Preis eines Derivats sich aus dem erforderlichen Eigenkapital ergibt, um das Derivat vollständig (bzw. bestmöglich) zu replizieren (d.i. zu hedgen).

Zur Replikation von 1 Calloption werden 0.25 Aktien gekauft und ein Kredit in Höhe von 19.048 aufgenommen. Der Eigenkapitalbedarf ist also:

$$\underbrace{0.25 \cdot 100}_{\text{Aktien}} + \underbrace{-\ 19.048}_{\text{Kredit}} = \underbrace{5.952}_{\text{EK-Bedarf}}$$

Wird das gleiche Zahlenbeispiel für einen Put durchgerechnet, der einen Payoff von C[u] = 0 und C[d] = 30 hat, so ergibt sich:

$$\Delta = \frac{0 - 30}{(100 \cdot 1.2) - (100 \cdot 0.8)} = \frac{-30}{40} = -.075$$

$$B = \frac{(1.2 \cdot 30) - (0.8 \cdot 0)}{(1.2 \cdot 1.05) - (0.8 \cdot 1.05)} = \frac{36}{0.42} = 85.714$$

Zur Replikation von 1 Putoption werden 0.75 Aktien (leer) verkauft und zusätzlich eine Festgeldanlage in Höhe von 85.714 getätigt. Der Eigenkapitalbedarf ist also:

$$-0.75 \cdot 100 + 85.714 = 10.714$$

So konnte also gezeigt werden, dass

eine Calloption = fremdfinanzierte Aktienposition
Kredit ΔS

und eine Putoption = fremdfinanzierte Festgeldanlage
short Aktie B

Sowohl Calls wie Puts sind also fremdfinanzierte Anlagen, die einen bestimmten Leverage-Effekt aufweisen. Der Leverage-Faktor dient als Mass der Fremdfinanzierung.

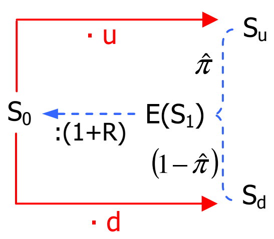
Call-Leverage: $L_C = \frac{-B}{\Delta S} = \frac{19.048}{25} = 76.2\%$ Put-Leverage: $L_P = \frac{-\Delta S}{B} = \frac{75}{85.714} = 87.5\%$

→ Sowohl Call wie Put sind also massiv fremdfinanzierte Anlagen!

6.3 Risikoneutrale Bewertung

Es erscheint bemerkenswert, dass zur Berechnung der arbitragefreien Optionspreise keine Annahmen über π notwendig waren. Aussagen zum risikolosen Zinssatz R und zu den Volatilitätsfaktoren u und d sind hinreichend, um mittels Replikation arbitragefreie Optionspreise zu bestimmen.

Risikoneutrale Wahrscheinlichkeit



Der heutige Aktienkurs kann als Barwert des erwarteten zukünftigen Aktienkurses (Erwartungswert) aufgefasst werden. Gegeben die Wahrscheinlichkeiten π bzw. $1-\pi$ lässt sich der erwartete Aktienkurs in der Zukunft bestimmen, der dann abdiskontiert den heutigen Aktienkurs ergibt. Diese Fragestellung ist jedoch im Allgemeinen nicht relevant, weil der heutige Aktienkurs im Markt beobachtet werden kann.

Viel interessanter ist die Frage, welche Gewichtungsfaktoren $\hat{\pi}$ bzw. $1-\hat{\pi}$ gewählt werden müssen, um gegeben bestimmte Volatilitätsfaktoren u, d den heutigen Aktienkurs S_0 zu erhalten.

Die Volatilitätsfaktoren berechnen sich (sofern nicht gegeben):

$$u = \frac{S_u}{S_0} \quad \text{und} \quad d = \frac{S_d}{S_0}$$

Um eine Formel für die Gewichtungsfaktoren zu erhalten, wird die hypothetische Formel für den heutigen Aktienkurs aufgestellt und nach $\hat{\pi}$ aufgelöst.

$$S_0 = \frac{\hat{\pi} \cdot S_u + (1-\hat{\pi}) \cdot S_d}{1+R} = \frac{\hat{\pi} \cdot S_0 \cdot u + (1-\hat{\pi}) \cdot S_0 \cdot d}{1+R}$$

$$1 = \frac{\hat{\pi} \cdot u + (1-\hat{\pi}) \cdot d}{1+R}$$

$$1+R = \hat{\pi} \cdot u + (1-\hat{\pi}) \cdot d$$

$$1+R = \hat{\pi} \cdot (u-d) + d$$

Sodass: $\hat{\pi} = \frac{(1+R)-d}{u-d}$

Obwohl die äussere Form an eine Wahrscheinlichkeit erinnert, ist $\hat{\pi}$ keine Wahrscheinlichkeit, sondern ein Gewichtungsfaktor. Es gibt jedoch einen offensichtlichen Bezug zu statistischen Wahrscheinlichkeiten (sie summieren sich zu 1, die Berechnung gründet auf einem "umgekehrten" Erwartungswert). Aus diesem Grund wird $\hat{\pi}$ auch als risikoneutrale Wahrscheinlichkeit oder Martingale-Wahrscheinlichkeit bezeichnet.

Dementsprechend bezeichnet man den Erwartungswert, der sich aus diesen Gewichtungsfaktoren ergibt, als risikoneutralen Erwartungswert ($E(S_1)$). Dieser risikolose Erwartungswert liegt konstruktionsgemäss im Umfang der risikolosen Verzinsung über dem heutigen Kurs.

Man spricht bei diesem Prinzip von Risikoneutralität, weil der Erwartungswert mit dem risikolosen Zins (1 + R) abgezinst, d.h. auf eine Risikoprämie verzichtet wird, was nur im Falle von Risikoneutralität möglich ist.

Deutlich muss jedoch gesagt werden, dass damit nicht Risikoneutralität der Individuen unterstellt wird. Einzig die Gewichtungsfaktoren wurden unter der Annahme der risikolosen Abdiskontierung ermittelt.

Mit der Replikationseigenschaft und den Formeln für Martingale-Wahrscheinlichkeiten lassen sich beliebige Derivate eines gegebenen Underlyings konsistent (d.h. arbitragefrei) bewerten. Es lässt sich zeigen, dass:

$$C = \frac{C[u] \cdot \hat{\pi} + C[d](1-\hat{\pi})}{(1+R)}$$

Die traditionelle Bewertung errechnet aus der statistischen Eintretenswahrscheinlichkeit aller Endzustände einen Erwartungswert und diskontiert diesen mit einer Risikoprämie ab. Dieses Vorgehen wertet aber nicht alle verfügbare Information (insbesondere den heute beobachtbaren Marktwert S_0) aus. Die traditionelle Bewertung ist also inkonsistent, solange das Underlying heute existiert und einen Preis hat.

Die Beobachtbarkeit von S substituiert also π (ohne Dach) und RP (Risikoprämie) durch $\hat{\pi}$ und R (risikolosen Zinssatz). Entsprechend kann ein Derivat genau dann risikoneutral bewertet werden, wenn es heute einen Preis für das Underlying gibt. Das ist zum Beispiel für Zinsderivate (Zinsen sind kein Preis) oder Temperaturderivate (dito) nicht der Fall!

6.4 Preiseigenschaften binomial bewerteter Optionen

6.4.1 Veränderung des Aktienkurses

Ausgangswerte:

S	100
u	1,2
d	0,8
X	110
R	0,05

Ausgangpunkt bildet das bekannte Zahlenbeispiel aus 6.1. mit den nebenstehenden Ausgangswerten. Diese liefern die bekannten Preise für einen Call und einen Put:

S=100	6.4.1.1.1 Call	Put
C	5,9524	11,2500

Wird der Aktienkurs auf S' = 105 erhöht und alle anderen Grössen belassen, so ergeben sich:

S=105	6.4.1.1.2 Call	6.4.1.1.3 Put
C	9,5238	9,7500

Der Anstieg des Kurses von S auf S' hat also den Call verteuert (und den Put verbilligt). Jedoch ist der Preisanstieg des Calls geringer als der Anstieg des Aktienkurses, es gilt:

$$|\Delta C| \leq |\Delta S|$$

Wie stark der Callpreis auf eine Aktienkursveränderung reagiert, kann mit dem Leverage-Effekt ("Hebel") beziffert werden:

$$HEBEL = \frac{\Delta C / C}{\Delta S / S} \qquad \text{im Zahlenbeispiel: } \frac{3.5714 / 5.9524}{5/100} = \frac{0.6}{0.05} = 12$$

Mit dem Anstieg von S steigt auch der Aktienanteil Δ im Replikationsportfolio. Dies ist auf die Konvexität der Optionspreise zurückzuführen und wird als Gamma-Effekt bezeichnet (siehe auch bei den Greek Letters weiter unten).

6.4.2 Veränderung des risikolosen Zinssatzes

Ein Anstieg des Zinssatzes führt beim Call dazu, dass der Barwert des Kredites im Replikationsportfolio sinkt. Das erforderliche Eigenkapital zur Replikation muss also steigen, und damit steigt auch der Callpreis.

R=5%	6.4.2.1.1 Call	Put
C	5,9524	11,2500

R=10%	6.4.2.1.1.1 Call	Put
C	6,8182	7,5000

Umgekehrt wird der Put billiger, weil der Wert der Festgeldanlage im Replikationsportfolio abnimmt.

6.4.3 Veränderung der Volatilität

Im Binomialmodell spiegelt sich die Volatilität in den Volatilitätsfaktoren u, d wider. Weil man als Optionkäufer typischerweise asymmetrisch von gestiegener Volatilität profitiert, haben Veränderungen der Volatilität einen starken Effekt auf die Optionspreise.

u=1.2, d=0.8	6.4.3.1.1 Call	Put
C	5,9524	11,2500

u=1.3, d=0.7	Call	Put
C	11,1111	16,6667

Zu bemerken ist, dass die "richtige", das heisst die tatsächliche Volatilität unbekannt und nicht beobachtbar ist. Im Optionspreis spiegelt sich also die Vola-Erwartung des Marktes.

6.4.4 Veränderung der Restlaufzeit

Für den europäischen Call ist der Effekt einer längeren Restlaufzeit klar: das Volatilitätspotential steigt (entweder höhere Volatilitätsfaktoren oder mehr Perioden), wodurch das Gewinnpotential des Calls ansteigt. Auch positiv ist der Zinseffekt: da der Käufer des Calls sein Geld länger behalten kann (bevor er damit die Aktien kaufen "muss", wenn er die Option ausübt), werden ihm länger Zinsen gezahlt. Diese beiden Faktoren machen den Call eindeutig teurer.

Beim europäischen Put ist der Effekt nicht so klar. Das Volatilitätspotential nimmt zwar auch zu, das Gewinnpotential ist aber beschränkt (ein Put zahlt im Maximum den Strikepreis). Der Zinseffekt ist aber negativ: der Käufer des Puts muss länger warten, bis er seine (unverzinsliche) Aktie verkaufen kann und dafür (verzinsliches) Geld zurück bekommt.

Bei der amerikanischen Option gilt, dass man mit einem langen Kontrakt nie schlechter gestellt sein kann als mit einem kurzen. Der Effekt einer Laufzeitverlängerung schlägt sich also sowohl bei Put wie Call in höheren Preisen nieder.

6.5 Rekursive Bewertung und dynamische Replikation

6.5.1 Binomiale Optionsbewertung über mehrere Perioden

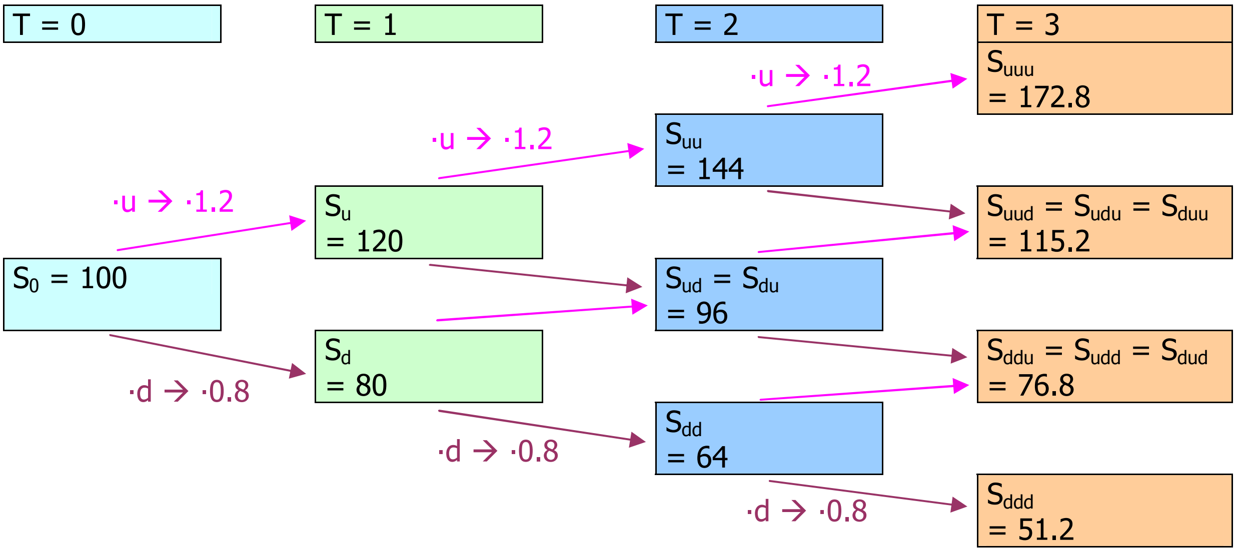
Bisher wurde eine Option nur über eine Periode bewertet. Die Bewertung war in diesem Fall klar. Wenn über mehr Perioden eine Option bewertet werden soll, ist das Verfahren um ein mehrfaches aufwändiger.

Gegeben den heutigen Aktienkurs, die Volatilitätsfaktoren und den einfachen Zins gliedert sich die rekursive Bewertung einer Option in zwei Hautpphasen:

- I) Bestimmung der Aktienkurse in den verschiedenen States
- II) Bestimmung des Optionswertes bei Verfall und in den verschiedenen States mit Hilfe der Martingale Wahrscheinlichkeiten

Dies sei an einem Zahlenbeispiel erläutert:
Zu bewerten ist eine europäische Call Option über 3 Perioden à 6 Monate. Der heutige Aktienkurs S_0 betrage 100, der Strike sei X = 110, die Volatilitätsfaktoren sind u = 1.2, d = 0.8.

I) Bestimmung der Aktienkurse



Der Aktienkursprozess verläuft also von links nach rechts.

II) Bestimmung des Optionswertes bei Verfall und in den verschiedenen States mit Hilfe der Martingale Wahrscheinlichkeiten.

Im Verfallszeitpunkt besteht der Wert der Option nur noch aus ihrem inneren Wert. Für einen Call ist das

$$C_T = \max(S_T - X; 0).$$

Der Wert der Option wird von *rechts nach links* berechnet, also ausgehend vom Wert der Option im Verfallszeitpunkt.

Zuerst werden die Martingale Wahrscheinlichkeiten bestimmt:

$$\hat{\pi} = \frac{(1+R)-d}{u-d}$$

Es ist zu beachten, dass für R hier nur der über 6 Monate (1 Periode) gültige Zins eingetragen werden darf:

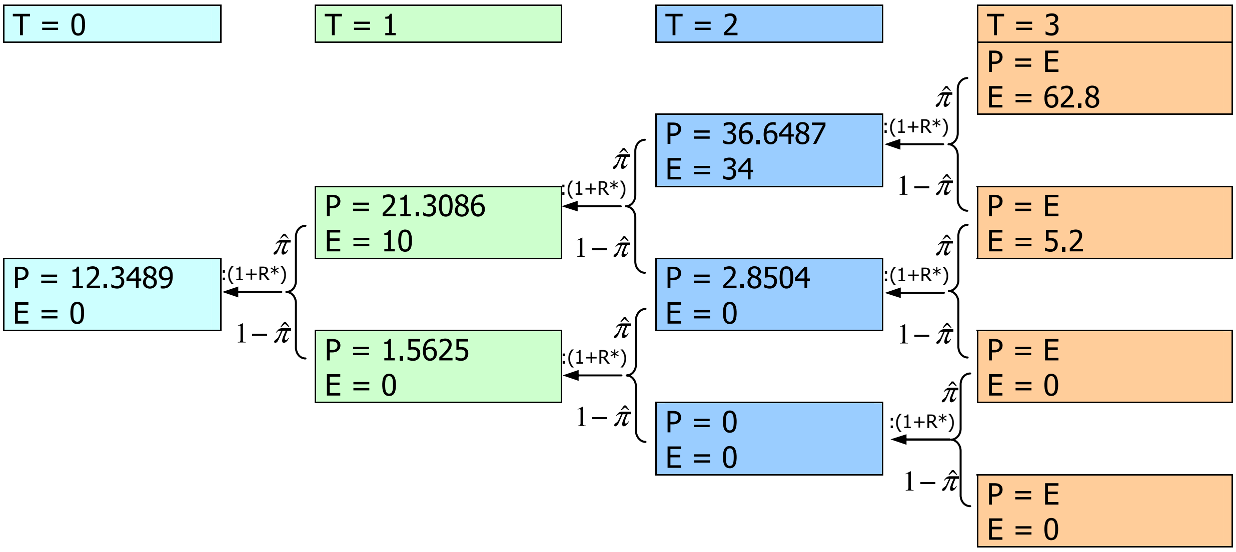
$$1+R^* = (1+R)^T \quad \rightarrow \quad 1+R^* = 1.05^{0.5} = 1.0247$$

$$\hat{\pi} = \frac{1.0247-0.8}{1.2-0.8} = 0.5617 \quad \text{und} \quad 1-\hat{\pi} = 0.4383$$

Aus den Optionswerten bei Verfall und den Martingales kann nun der heutige Preis der Option berechnet werden, indem ein State nach dem anderen von der Zukunft in die Gegenwart zurückgerechnet wird.
Die geschlossene Formel, um den Optionspreis eine Periode in die Vergangeheit zu rechnen (1 Baumschritt) lautet:

Für den Preis P_{uu} ergibt sich zum Beispiel:

$$C = \frac{C[u]\cdot\hat{\pi} + C[d](1-\hat{\pi})}{(1+R)} = \frac{62.8\cdot 0.5617 + 5.2\cdot 0.4383}{1.0247} = 36.6487$$

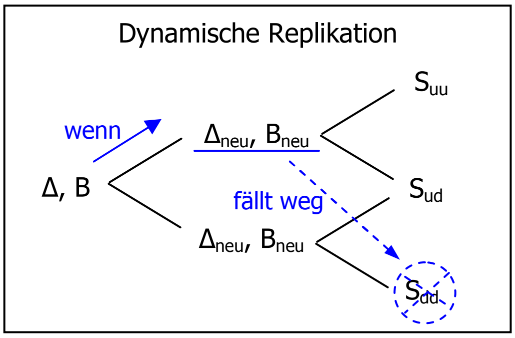


In diesem Beispiel liegt der errechnete Optionspreis P in allen States über dem Ausübungswert E. Es spielt deshalb keine Rolle, ob es sich um eine Option amerikanischen oder europäischen Typs handelt.

Falls aber einmal der Ausübungswert E über dem errechneten Preis P liegt, so ist es sinnvoll, den amerikanischen Call vorzeitig auszuüben.

Bereits früher wurde gezeigt, dass eine Option durch eine Kombination von Aktie und Festgeld bzw. Kredit repliziert werden kann.

6.5.2 Dynamische Replikation

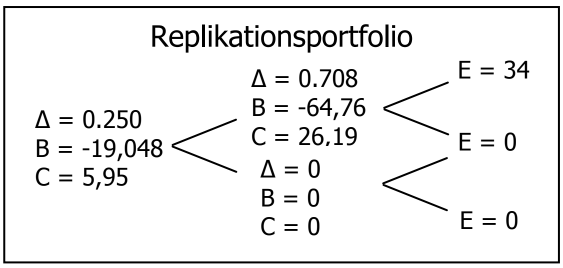


Bei einer einperiodigen Option ist die Replikation statisch, weil sich der Kurs nur einmal bewegt. Wenn aber die Option sich über mehr als eine Periode erstreckt, so kann im Anfangszeitpunkt keine definitive Replikation erfolgen, weil es (im Fall von zwei Perioden) drei mögliche Endzustände, aber nur zwei veränderbare Grössen (Δ, B). Um eine perfekte Replikation zu erreichen, muss also das Replikationsportfolio in jeder Periode angepasst werden.

Mit jedem Kursschritt, den ein Underlying zurücklegt, schrumpft der Binomialbaum. Damit wird ein Zustand unerreichbar. Dieser Zustand muss damit nicht mehr ins Replikationsportfolio einfliessen.

Für eine Option, die zwei Perioden Laufzeit hat, ergibt sich die folgende Replikation:

$S_0 = 100$
u = 1.2; d = 0.8
R = 1.05, T = 1
X = 110



Wenn sich der Aktienkurs nach oben entwickelt, so verändert sich das Replikationsportfolio:

Δ = 0.25 $\quad$ Δ' = 0,708 $\quad$ → 0,46 Aktien à 120 kaufen → Kosten: 55
B = -19.048 $\quad$ B' = -64,76 $\quad$ → Kredit um 45 aufstocken → liefert 46

Der erforderliche Kredit wird exakt im Betrag des erforderlichen Aktienwertes aufgestockt (inklusive Zins!). Man spricht dabei von der Selbstfinanzierungseigenschaft der dynamischen Replikation.

Falls der Aktienkurs in der ersten Periode sinken sollte, so wird die Position liquidiert.

6.5.3 Vorzeitige Ausübung

Es ist niemals optimal, Calls auf dividendenlose Aktien vorzeitig auszuüben aus den folgenden Gründen:

- das Geld aus dem ungebundenen Kapital liefert Zins bis zum Verfall.
- Fällt der Aktienkurs bis zum Verfall, werden Verluste umgangen, da der Call höchstens die Prämie verliert.
- will der Investor den Gewinn vorzeitig realisieren, so kann er den Call verkaufen.

Demgegenüber kann es optimal sein, Puts auf dividendenlose Aktien vorzeitig auszuüben. Sei der Put tief im Geld ($S \approx 0$, $X = 10$):

- bei sofortiger Ausübung kann $\Pi = 10$ realisiert werden.
- der Gewinn kann nicht mehr grösser werden, da der Aktienkurs nicht unter $S = 0$ fallen kann.
- das Geld, das der Investor bei Ausübung erhält, kann verzinslich angelegt werden.
- sinkt der Aktienkurs hinreichend tief ab und/oder steigt der Zins, so kann eine vorzeitige Ausübung lohnen.

7 Binomiale Konvergenz

7.1 Binomialprozess

In den vorangehenden Beispielen wurde für den zugrundeliegenden Aktienkurs ein binomialer Random Walk Prozess angenommen. Am Ende jeder (endlich langen) Periode kann der Kurs zwei unterschiedliche Werte annehmen. Zudem ist der Preisprozess geschlossen: ob der Kurs zuerst steigt und dann fällt oder umgekehrt, führt zum gleichen Kurs wie umgekehrt.

Es kann der Erwartungswert und die Varianz dieses Prozesses berechnet werden; die Charakterisierung dieser Eigenschaften erfolgt stets aufgrund stetiger Renditen. Dazu ist jedoch die Annahme statistischer Wahrscheinlichkeiten erforderlich.

Definiert wird ein (binomialer) Renditeprozess:

						$S_{uu} = S \cdot e^{2r(u)}$	$r(uu) = \ln(u^2) = 2\ln(u)$
	π	$S_u = S \cdot e^{r(u)}$		$r_u = \ln(u)$			
S						$S_{ud} = S \cdot e^{r(u)+r(d)}$	
	$1-\pi$	$S_d = S \cdot e^{r(d)}$		$r_d = \ln(d)$			
						$S_{dd} = S \cdot e^{2r(d)}$	$r(dd) = \ln(d^2) = 2\ln(d)$

Bei den Parametern π und 1 – π handelt es sich ausdrücklich nicht um Martingale-Wahrscheinlichkeiten, sondern um "echte" statistische Wahrscheinlichkeiten.

Es lassen sich nun Erwartungswert und Varianz für die Rendite nach n Perioden bestimmen:

$$E[\tilde{r}_n] = n \cdot E[\tilde{r}] = n \cdot [\pi \cdot \ln(u) + (1-\pi) \cdot \ln(d)]$$
$$\operatorname{var}[\tilde{r}_n] = n \cdot \operatorname{var}[\tilde{r}] = n \cdot \pi \cdot (1-\pi) \cdot \ln[u]^2$$

Es muss gelten:

$$E[\tilde{r}_n] = \mu \cdot T = \mu \cdot n \cdot \Delta t$$

und $$\operatorname{var}[\tilde{r}_n] = \sigma^2 \cdot T = \sigma^2 \cdot n \cdot \Delta T$$

Es ergeben sich also zwei Gleichungen mit drei Unbekannten. Der dritte Freiheitsgrad kann / muss zusätzlich gewählt werden. Es gibt zwei Ansätze, um den dritten Freiheitsgrad zu wählen:

a) CRR – Ansatz: u = 1/d (nach Cox, Ross, Rubinstein, 1979)
b) EQU – Ansatz: Equal Probability Ansatz: π = (1 – π) = ½

An dieser Stelle wird nur auf den CRR vertieft eingegangen.

7.2 CRR-Ansatz und -Approximation

Es wird die folgende zusätzliche Annahme getroffen:

u = 1/d

Da gilt: r_u = ln[u] und r_d = ln[d] folgt daraus:

ln[u] = – ln[d]

Der Renditebaum wird also symmetrisch. Zusammen mit den Gleichungen für Erwartungswert und Varianz lässt sich nur ein hinreichend definiertes Gleichungssystem aufstellen. Es wird die Bedingng u = 1/d in die Momente-Gleichungen eingesetzt. Es ergibt sich:

$$n \cdot \ln[u] - (2\pi - 1) = n \cdot \mu \cdot \Delta t$$
$$n \cdot \pi(1-\pi) \cdot (2 \cdot \ln[u])^2 = n \cdot \sigma^2 \cdot \Delta t$$

Wird die erste Gleichung quadriert und zur zweiten addiert, so folgen daraus die exakten Lösungen des CRR-Ansatzes:

CRR-Ansatz:

$$u = e^{\sqrt{\mu^2 \cdot \Delta t^2 + \sigma^2 \cdot \Delta t}}$$
$$d = e^{-\sqrt{\mu^2 \cdot \Delta t^2 + \sigma^2 \cdot \Delta t}}$$
$$\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu \cdot \Delta t}{\sqrt{\mu^2 \cdot \Delta t^2 + \sigma^2 \cdot \Delta t}}$$

Diese Berechnungen sind recht aufwändig. Es wird deshalb oft mit der CRR-Approximation gerechnet: für sehr viele Baumschritte geht $\Delta t^2 \rightarrow 0$ (schneller als Δt), weshalb man die Terme mit quadratischem Zeitindex weg lässt. Es ergibt sich:

CRR-Approximation:

$$u = e^{\sqrt{\sigma^2 \cdot \Delta t}} = e^{\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sqrt{\sigma^2 \cdot \Delta t}} = e^{-\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}}$$
$$\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{\sigma} \cdot \sqrt{\Delta t}$$

In der CRR-Approximation stimmt zwar der Erwartungswert exakt, die Varianz ist jedoch nur noch approximativ richtig.

7.3 Übergang vom Binomial- zu stetigen Prozessen

Grundsätzlich folgt die Bewertung immer dem gleichen Muster: die möglichen States werden berechnet (es wird ein Binomialbaum generiert), die States werden mit ihren Martingale-Wahrscheinlichkeiten gewichtet und dieser gewichtete Wert wird abdiskontiert. Durch die Verwendung von Martingales an Stelle von statistischen Wahrscheinlichkeiten handelt es sich um eine risikoneutrale Bewertung.

Im Fall diskreter Zeit gilt:

$$\hat{\pi} = \frac{(1+R) - d}{u - d}$$

und in stetiger Zeit:

$$\hat{\pi} = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}$$

Werden für die Volatilitätsfaktoren die aus dem CRR-Ansatz gewonnenen Lösungen eingesetzt, so ergibt sich:

$$\hat{\pi} = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - e^{-\sqrt{\mu^2 \cdot \Delta t^2 + \sigma^2 \cdot \Delta t}}}{e^{\sqrt{\mu^2 \cdot \Delta t^2 + \sigma^2 \cdot \Delta t}} - e^{-\sqrt{\mu^2 \cdot \Delta t^2 + \sigma^2 \cdot \Delta t}}}$$

Um die Notation zu vereinfachen, wird $\Delta s = \sqrt{\mu^2 \cdot \Delta t^2 + \sigma^2 \cdot \Delta t}$ gesetzt. Es folgt:

$$\hat{\pi} = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - e^{-\Delta s}}{e^{\Delta s} - e^{-\Delta s}}$$

Aus der Mathematik (Folgen- und Reihentheorie) ist bekannt, dass sich die Exponentialfunktion in einer Taylorreihe entwickeln lässt:

$$e^x \overset{Taylor}{\cong} \sum_n \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \ldots$$

Die Taylor-Entwicklung wird nach dem quadratischen Glied abgebrochen (Taylor-Approximation), sodass:

$$\hat{\pi} = \frac{1 + r \cdot \Delta t - \left(1 - \Delta s + \frac{1}{2} \cdot \Delta s^2\right)}{\left(1 - \Delta s + \frac{1}{2} \cdot \Delta s^2\right) - \left(1 - \Delta s + \frac{1}{2} \cdot \Delta s^2\right)}$$

$$\hat{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot \Delta t}{\Delta s}$$

Wichtig: diese Gleichung verletzt die aribtragefreiheit von Derivatpreisen, wenn Δt >> 0, was beim der CRR-Ansatz nicht der Fall ist. Im Unterschied zum CRR-Ansatz handelt es sich bei der obigen Gleichung um Konvergenzbedingungen handelt, welche bei einer endlichen Anzahl binomialer Veränderungen zu den entsprechenden Schritten fürhen.

Während also die Spezifikation gemäss dem CRR-Ansatz dem Binomialprozess über jeden beliebigen Zeitraum einen Erwartungswert von μΔt und eine Varianz von σ^2T verleiht, bewirkt die Spezifikation aus der Taylor-Entwicklung lediglich eine Konvergenz der Momente zu diesen Werten. Es ist also unter diesem Ansatz nicht möglich, die lokalen Momente (Erwartungswert und Volatilität) des risikoneutralen Prozesses exakt auf einen vorgegebenen Wert σ hin zu kalibrieren – und trotzdem eine arbitragefreie Bewertung aufrecht zu erhalten.

Für Erwartungswert und Varianz unter Risikoneutralität gilt:

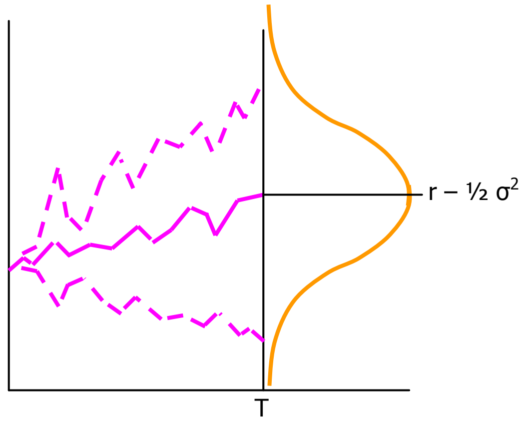
$$\hat{E}[\tilde{r}_n] = n \cdot \hat{E}[\tilde{r}_1] = n \cdot \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] \cdot \Delta t = \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right] T$$

$$\hat{\text{var}}[\tilde{r}_n] = n \cdot \hat{\text{var}}[\tilde{r}_1] = n \cdot \sigma^2 \cdot \Delta t = \sigma^2 \cdot T$$

Der Übergang von der statistischen in die risikoneutrale Welt bewirkt also bei der Modellierung der Aktienkurse eine Transformation des Erwartungswertes (Drifts) μ zu $r - ½\sigma^2$, während die Volatilität beider Prozesse identisch ist.

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz kann gezeigt werden, dass die risikoneutrale Binomialverteilung zu einer Normalverteilung mit Erwartungswert r – ½ σ^2 und Varianz σ^2 konvergiert. Dies heisst, dass die derivativen Instrumente relativ zu einer Verteilung bewertet werden, deren Erwartungswert durch den risikolosen Zinssatz und die Volatilität der stetigen Rendite charakterisiert wird. Der Erwartungswert ist also von keinen individuellen Risikopräferenzen abhängig, da sowohl der risiikolose Zinssatz als auch die Volatilität beobachtbare Marktparameter darstellen (letzteres ist natürlich eine Annahme des Modells). Wenn aber Risikopräferenzen bei der Bewertung keine Rolle spielen, so bezeichnet man dies als Risikoneutralität. Deshalb die Bezeichnung "risikoneutrale" oder "präferenzfreie" Bewertung.

Renditeverteilung bei stetigem Kursprozess



7.4 Stochastischer Aktienkursprozess

7.4.1 Geometrischer Wiener Prozess

Betrachtet werden zwei Punkte im Binomialbaum: i – 1 und i, sodass gilt:

$$s_i = s_{i-1} \cdot e^{\tilde{r}_i}$$
$$\tilde{r}_i = \ln[\tilde{s}_i] - \ln[s_{i-1}]$$

Zwischen i – 1 und i liegen im stetigen Prozess sehr viele Baumschritte, sodass aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes gilt:

$$r_i \sim N(\mu \cdot \Delta t, \sigma^2 \cdot \Delta t)$$

Umgeformt zu einer Standardnormalverteilung ergibt sich:

$$\frac{\Delta \ln[\tilde{s}] - \mu \cdot \Delta t}{\sigma \cdot \Delta t} = \tilde{z} \sim N(0,1)$$

Es lässt sich so ein stochastischer Prozess generieren, der einem geometrischen Wiener Prozess entspricht. Der Prozess lautet:

$$d \ln[\tilde{s}] = \mu \cdot dt + \sigma \cdot \tilde{z} \cdot \sqrt{dt}$$

Dieser Prozess hat die folgenden vier Eigenschaften:

i) zeitstetig (keine Sprünge)
ii) Random Walk (also iid, was Prognosen verunmöglicht)
iii) Zuwächse sind normalverteilt
iv) Momente sind zeitproportional

7.4.2 Exkurs: Ito's Lemma

Im wesentlichen liefert Itos Lemma eine Kettenregel für stochastische Funktionen:

sei $f = f(W, t)$

Wobei W eine stochastische Funktion, genauer ein generalisierter Wiener Prozess ist, für den gilt:

$$dW = \alpha \cdot dt + \beta \cdot dZ(t)$$

Es ist:

- Z(t) eine Zufallsvariable
- Z(u) – Z(t) ist normalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = u - t$
- Z(u) – Z(t) und Z(t) – Z(s) sind unabhängig für $s < t < u$

Eine Taylorentwicklung von f liefert:

$$df = \frac{\partial f}{\partial W} \cdot dW + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} \cdot (\alpha \cdot dt + \beta \cdot dZ)^2 + \ldots$$

Alle Terme auf der rechten Seite (der quadratische Term wird ausmultipliziert) gehen gegen Null und können ignoriert werden, bis auf den letzten Term $(dZ)^2$. Wird jetzt der Wiener Prozess in die Taylorentwicklung eingesetzt und dZ isoliert, so ergibt sich der als Itos Lemma bekannte Ausdruck:

Itos Lemma: $$df = \beta \frac{\partial f}{\partial W} dX + \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial W} + \frac{\beta^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt$$

Im allgemeinen Wiener Prozess sind die Parameter α und β konstant. Eigentlich gilt das oben hergeleitete Resultat also nur für den Fall konstanter Parameter. Es lässt sich aber zeigen, dass das Resultat auch für den Fall nicht konstanter Parameter gültig ist.

7.4.3 Stochastischer Lognormalprozess

Im Zusammenhang mit Derivatbewertung wird als Grundprozess ein folgender stochastischer Prozess verwendet:

$$dS = \left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dZ$$

Dies ist eine stochastische Differentialgleichung, deren Lösung schliesslich den gewünschten Prozess liefert:

$$\tilde{s}(t) = s_0 \cdot e^{\mu t + \sigma \cdot \sqrt{t} \cdot \tilde{z}}$$ wobei s(t) lognormalverteilt ist.

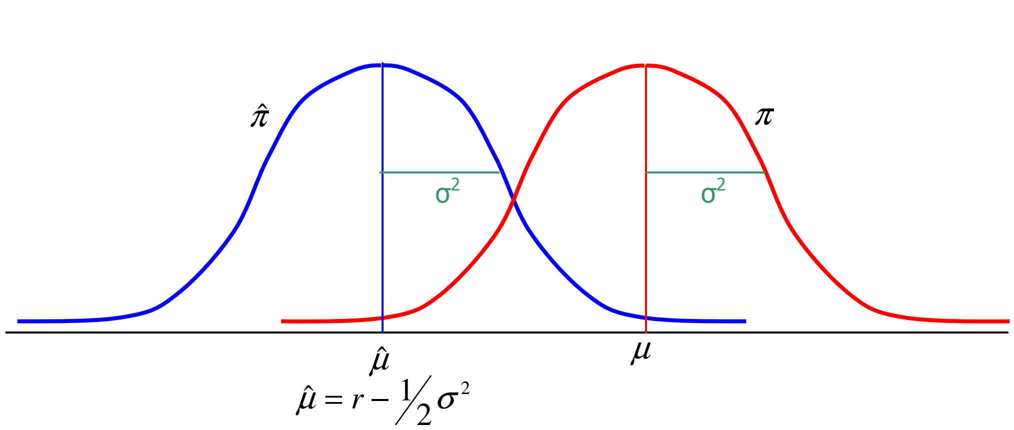
In der risikoneutralen Welt muss der Erwartungswert korrigiert werden:

$$\alpha = \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \quad \text{und} \quad \mu = r - \frac{1}{2} \sigma^2 \quad \text{liefert:} \quad \alpha = r$$

Der stochastische Prozess vereinfacht sich unter Risikoneutralität also zu

$$ds = s \cdot r \cdot dt + s \cdot \sigma \cdot dz$$

Risikoneutrale und stochastische Verteilung



$$C_0 = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} C(S_T) \cdot \hat{\pi} \cdot S_T \cdot dS_T$$ (risikoneutrale Bewertung)

8 Das Black-Scholes-Merton Modell

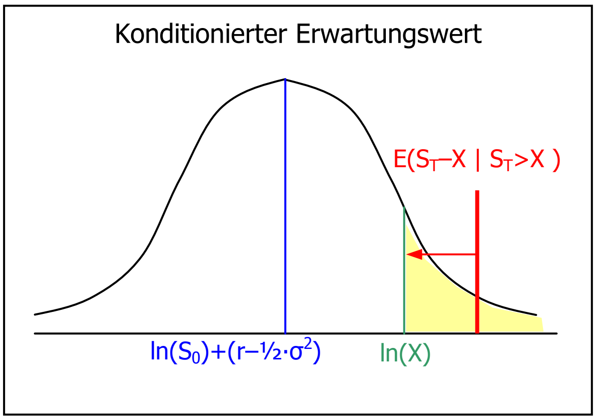
8.1 Grundlagen

8.1.1 Calloption

Das Black-Scholes Modell, wie es meist kurz genannt wird, wurde im Jahre 1973 publiziert. Es basiert auf dem risikoneutralen Bewertungsansatz. Der Preis eines Derivates entspricht den risikolos abgezinsten erwarteten zukünftigen Cashflows:

Call: $C = e^{-rT} \cdot \hat{E}\left[\max\left(0; \tilde{S}_T - X\right)\right]$

Put: $P = e^{-rT} \cdot \hat{E}\left[\max\left(0; X - \tilde{S}_T\right)\right]$



Wird einmal nur der Call betrachtet, so lässt sich obige Formel als konditionierter Erwartungswert ausdrücken:

$$C = e^{-rT} \cdot \hat{E}\left[S_T - X \mid S_T > X\right]$$

und bezogen auf die gesamte Verteilung S_T:

$$C = e^{-rT} \cdot \underbrace{\hat{E}\left[S_T \mid S_T > X\right]}_{\text{lognormalverteilte Grösse}} - e^{-rT} \cdot \underbrace{\hat{E}\left[X \mid S_T > X\right]}_{\text{lognormale Dichte}}$$

Der Optionspreis entspricht also dem roten Pfeil in obenstehender Grafik.

Man kann zeigen, dass:

$$\hat{E}\left[S_T \mid S_T > X\right] = F \cdot N(z_1) = S \cdot e^{rT} \cdot N(z_1)$$

mit: $$z_1 = \frac{\ln\left(S / Xe^{-rT}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Es handelt sich um den risikoneutral erwarteten Aktienkurs bei Optionsverfall, unter der Bedingung der Ausübung. Der Ausdruck zeigt den so erwarteten Ertrag des Optionsgeschäfts.

Der zweite Erwartungswert kann formuliert werden als:

$$\hat{E}\left[X \mid S_T > X\right] = X \cdot N(z_2)$$

mit $$z_2 = \frac{\ln\left(S / Xe^{-rT}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = z_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Es handelt sich um den Ausübungspreis multipliziert mit der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit der Optionsausübung. Anders: Der Ausdruck zeigt die erwarteten Kosten des Optionsgeschäfts.

Die Werte z_1 und z_2 sind nahe bei Null für at-the-money Optionen; in diesem Fall sind $N(z_1)$ und $N(z_2)$ nahe bei 0.5; die beiden Normalverteilungsabschnitte sind zwischen 0.5 und 1, wenn die Calloption in-the-money liegt, und sie sind zwischen 0 und 0.5 bei out-of-the-money Calloptionen.

Die Formel für den Black-Scholes Calloptionspreis lautet also:

$$Call = S \cdot N(z_1) - X \cdot e^{-rT} N(z_2)$$

8.1.2 Putoption

Aufgrund der Put-Call Parität kann gezeigt werden, dass

$$S_0 + Put(X,T) = Xe^{-rT} + Call(X,T).$$

Für den Preis einer Putoption im Black-Scholes Modell folgt dann:

$$Put = S \cdot [N(z_1) - 1] - X \cdot e^{-rT} \cdot [N(z_2) - 1]$$

8.2 Implizite Volatilität

Im Black Scholes Modell ist der Optionspreis eine Funktion des Aktienkurses S, des Strikes X, des stetigen, risikolosen Zinssatzes r, der Volatilität σ und der Laufzeit T. Bis auf σ sind alle Grössen direkt im Markt bzw. im Kontrakt beobachtbar. Entgegen der Modellannahme von Präferenzfreiheit müssen die Investoren also ihre subjektiven Volatilitätserwartungen in die Preisfindung einbringen.

In einem liquiden Markt werden laufend Optionspreise generiert. Der Marktpreis der Option ist also beobachtbar. Es kann nun aus dem Marktpreis ein σ hergeleitet werden, das mit dem Preis konsistent ist. Dieses σ wird als implizite Volatilität bezeichnet.

Allgemeiner formuliert ist die implizite Volatilität jene Volatlität, die in einem spezifischen Bwertungsmodell (z.B. Black-Scholes) verwendet werden muss, damit der theoretische Optionspreis mit dem Marktpreis übereinstimmt.

Die implizite Volatilität ist also von der Wahl des Modells abhängig. Damit entsteht bei der Berechnung der impliziten Volatilität ein Modellrisiko.

8.3 Grenzen des Black-Scholes Modells

Das Black-Scholes Modell stellt relativ hohe Anforderungen an den Aktienkursprozess und die bewerteten Kontrakte. Es wurden aber im Laufe der Zeit diverse Modellerweiterungen und –alternativen entwickelt, die weniger restriktive Annahmen fordern.

Das Black-Scholes Modell ist nicht geeignet für:

- amerikanische Optionen
  Ausnahme: dividendenlose Calls, weil deren vorzeitige Ausübung nie optimal sein kann.

- stochastische Volatilität
  Das Black-Scholes Modell fordert eine konstante Volatilität. Wird diese Annahme aufgegeben, so muss der grundlegende stochastische Prozess verändert werden. Es

kann nicht mehr ein geometrischer Wiener Prozess verwendet werden, sondern es kommt ein GARCH-Prozess zum Zug.
Für nicht-zeitstetige Prozesse (es gibt vertikale und horizontale Sprünge bzw. Lücken im Kursprozess) haben Merton und Ingersoll das Diffusion-Jump Modell entwickelt, das auf einem Poisson-Prozess basiert. Hier ist allerdings eine explizite Modellierung der Sprünge notwendig.

- stochastische Prozesse für Volatilität
  Heston schlägt in seinem Modell einen stochastischen Prozess vor, der die Volatilität abschliessend modelliert:

  $$d\sigma = \kappa(\sigma_L - \sigma)dt + \sigma_\sigma \sqrt{dt} \cdot \tilde{z}$$

  Es ist κ der Anpassungsparameter der momentanen Volatilität an die langfristige Volatilität σ_L, σ_σ die Volatilität der Volatilität und $\sigma_\sigma \sqrt{dt} \cdot \tilde{z}$ ein beispielhafter stochastischer Prozess. Dieser Prozess liefert jedoch nicht in jedem Fall eine geschlossene Lösung für den Optionspreis.

- Stochastische Zinssätze
  Wie die Volatilität ist auch der Zins im Black-Scholes Modell konstant angenommen. Das ist zugegebenermassen in den meisten Fällen keine besonders scharfe Annahme, weil Zinssatzänderungen innerhalb der (relativ kurzen) Laufzeit einer Option im Allgemeinen nicht stark schwanken. Aber in Zeitperioden mit grosser Zinsunsicherheit, bei langfristigen Optionen (z.B. Converts, wobei hier die gesamte Stochastik des Bondpreises dazu kommt) und bei (lang laufenden) Aktienindexoptionen ist die Annahme konstanter Zinssätze sicher nicht angemessen.

- Transaktionskosten bei der Replikation
  Die zentrale Annahme des Black-Scholes Modells lautet: "Der Optionspreis ist die benötigte Menge Eigenkapital, um das replizierende Portfolio zu starten". Dies ist der zentrale Ansatzpunkt der Bewertung.
  In stetiger Zeit ist aber eine laufende Umschichtung des replizierenden Portfolios notwendig, es entstehen unendliche Transaktionskosten. Um diesem Effekt vorzubeugen, gibt es drei Strategien:
  1.) die Anpassung des Portfolios erfolgt jedes Mal nach Ablauf einer fixen Zeitspanne (sinnlos, weil sich in dieser Zeit sehr viel oder kaum etwas getan haben kann),
  2.) die Anpassung erfolgt angepasst an Kursbewegungen (wobei die Option möglicherweise deltaneutral, also nicht kurssensitiv ist → unnötige Anpassung) oder
  3.) die Anpassung erfolgt analog den Deltabewegungen, wobei hier wiederum die Möglichkeit besteht, zwischen einem Binomialprozess und einem stetigen Prozess für die Modellierung des Deltas zu wählen.

  Der stetige Prozess liefert zwar vermutlich die besseren Resultate, ist aber noch immer mit einem Tracking Error behaftet und ist in der Berechnung sehr komplex (Itô Calculus). Ein Modell mit stetig modelliertem Deltaprozess wurde erstmals von Leland 1985 entwickelt.

8.4 Anwendungen des Black-Scholes Modells

8.4.1 Dividendenzahlende Aktie

Bei einer europäischen Option kann einfach der Aktienkurs um die abdiskontierte Dividende korrigiert werden:

$$S^* = S - PV(D)$$

Wenn allerdings häufig Dividenden ausbezahlt werden, (zum Beispiel bei breiten Indizes und Quartalsdividenden), so bietet sich die Approximation über die durchschnittliche Dividendenrendite (average dividend yield) an. Diese Approximation ist allerdings nur dann gut, wenn die Dividendenzahlungen in etwa gleichmässig im Zeitverlauf und in etwa gleichbleibender Höhe anfallen. Die Dividendenrendite ist dann:

$$\delta = \ln\left[1 + \frac{D}{S}\right]$$

Das δ geht dann abgezinst in die Optionspreisformel ein:

$$S^* = S \cdot e^{-\delta (T - t)}$$

Für die Preisformel ergibt sich dann:

$$C = S \cdot e^{-\delta(T-t)} N(z_1) - X e^{-r(T-t)} N(z_2) \qquad \text{mit}$$

$$z_1 = \frac{\ln\left[\frac{S \cdot e^{-\delta(T-t)}}{X \cdot e^{-r(T-t)}}\right] + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Dieser Ansatz wurde zuerst von Merton 1973 vorgeschlagen. Man spricht vom Merton proportional dividend Ansatz.

8.4.2 Currency / Foreign Exchange

Der Ansatz ist eng mit der dividendenzahlenden Aktie verwandt. Das Underlying, so wird angenommen, besteht aus einer ausländischen Festgeldanlage mit Zins r*, wobei dieser Zins gerade der Dividendenrendite entspricht:

$$\delta = r^*$$

8.4.3 Futures

Optionen auf Futures bzw. Terminkontrakte findet man dort, wo das Underlying nicht existiert oder illiquid ist (z.B. bei Currency-Terminkontrakten und Commodities). Black nennt 1976 die beiden folgenden Anwendungen: Bewertung von Optionen auf Terminkontrakte (Terminkontrakt = Underlying), weil der Kassamarkt nicht existiert, und Optionen auf Kassageschäft, dessen Preis aber weniger informativ als der Terminkurs ist, z.B. in einem illiquiden Aktienindex. In die Bewertung von Optionen (bzw. Derivaten allgemein) fliessen immer die neusten Informationen über den Preis des Underlyings oder eines Derivates davon ein – unabhängig davon, auf was die Option sich genau bezieht.

Wird die bekannte Formel für Forwards nach dem Spotkurs aufgelöst, ergibt sich:

$$S = F \cdot e^{-(r-r^*)(T-t)}$$

Eingesetzt in die Formel für Currency-Optionen:

$$C = F \cdot e^{-(r-r*)(T-t)} \cdot e^{(-r*)(T-t)} N(z_1) - Xe^{-r(T-t)} N(z_2)$$

mit $$z_1 = \frac{\ln\left[\frac{F \cdot e^{-r(T-t)}}{X \cdot e^{-r(T-t)}}\right] + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\left[\frac{F}{X}\right] + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$$

9 Greek Letters

9.1 Überblick

Um das Risiko von Optionspositionen einzuschätzen, werden eine Reihe von Risikoparametern verwendet. Die meisten werden mit einem griechischen Buchstaben abgekürzt, deshalb nennt man sie "Greek Letters".

Bezeichnung	**Symbol**	**Mathematisch**	**Charakterisierung**
Delta	Δ	$\frac{\partial C}{\partial S}$	Zeigt die Sensitivität des Optionspreises bezüglich des Aktienkurses
Gamma	Γ	$\frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$	Zeigt die Sensitivität des Deltas bezüglich dem Aktienkurs.
Theta	Θ	$\frac{\partial C}{\partial t}$	Zeigt die Sensitivität des Optionspreises bezüglich der Zeit.
Vega	*keines*	$\frac{\partial C}{\partial \sigma}$	Zeigt die Sensitivität des Optionspreises bezüglich der Volatilität.
Rho	P	$\frac{\partial C}{\partial r}$	Zeigt die Sensitivität des Optionspreises hinsichtlich des Zinssatzes.
Omega	Ω	$\frac{\partial C / C}{\partial S / S}$	Zeigt die prozentuale Sensitivität des Optionspreises hinsichtlich der prozentualen Veränderung des Aktienkurses.

Bei den Greek Letters handelt es sich also um partielle Ableitungen des Optionspreises. Entsprechend können sie nur den marginalen Effekt einer einzelnen Veränderung (ceteris paribus) darstellen. Das kann vor allem bei nicht-linearen Zusammenhängen zu grösseren Fehleren führen.

Es ist wichtig zu bemerken, dass nur Delta, Gamma, Theta und Omega mit dem Black-Scholes Modell konsistent sind: das BSM wurde mit konstanter Volatilität und konstanten Zinssatz spezifiziert, eine Veränderung dieser Grössen ist also im Kontext dieses Modells streng genommen gar nicht zulässig.

9.1.1 Delta

Das Delta entspricht dem Aktiengehalt des Replikationsportfolios (die gleiche Benennung ist also nicht zufällig). Im Black-Scholes Modell ist:

Call = $S_0 \cdot N(z_1)$ – Kredit

Es lässt sich zeigen, dass

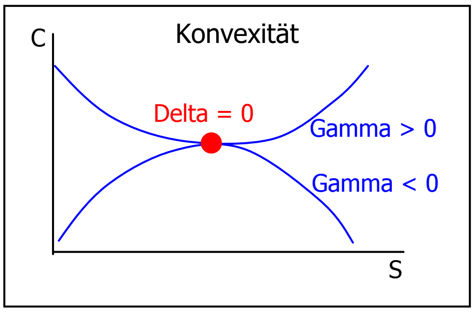
$\Delta = N(z_1)$

Diese Gleichung gilt, obwohl S in z_1 und z_2 vorkommt. Das Delta verhält sich aber so, als seien $N(z_1)$ und $N(z_2)$ von S undabhängig. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft für die Portfolioparameter selbstfinanzierter Strategien.

9.1.2 Gamma

Das Gamma misst die Nichtlinearität bzw. Konvexität des Optionspreises.

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = N'(z_1) \cdot \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}$$



Das Gamma ist vor allem wichtig bei

- tiefer Volatilität
- kurzer Laufzeit
- at-the-money Optionen

9.1.3 Theta

Theat gibt an, um wieviel sich der Optionspreis verändert, wenn ein Kalendertag vergeht, ohne dass sich der Aktienkurs (oder eine andere Bestimmungsgrösse) verändert. Theta ist in der Praxis in der Verwendung etwas problematisch, weil es unterschiedliche Definitionen gibt:

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} < 0$$

Wobei t der Bewertungszeitpunkt ist. Es gilt dann $\Theta < 0$, man spricht von der Time deprecation der Calloption.

Etwa gleich weit verbreitet ist die Definition über die Restlaufzeit:

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial \tau} > 0$$ für $\tau = T - t$, also die Restlaufzeit

Dieses Mass gibt dann den Wert der Verkürzung der Restlaufzeit (in Anteilen eines Jahres) an. Zu diesem Definitionsproblem kommt noch ein Skalierungsproblem hinzu.

9.1.4 Vega

Die Formel für das Vega lautet:

$$Vega = N'(z_1) \cdot S \cdot \sigma\sqrt{T}$$

Beim Vega ist es üblich, den Wert gegenüber den relativen (und nicht absoluten) Volatilitätsveränderungen auszuweisen; dazu muss der obigen Wert standardisiert werden:

$$Vega^* = {}^{Vega}\!/_{\sigma}$$

Daneben gilt es, den positiven Zusammenhang zwischen dem Gamma und dem Vega zu beachten:

$$Vega = \Gamma \cdot S^2 \cdot \sigma \cdot T$$

Dies hat eine praktische Bedeutung: Wenn ein Händler das Gamma seiner Position erhöht, dann erhöht sich ceteris paribus auch das Vega, d.h. die Volatilitätssensitivität (aber nicht die Volatilität per se) der Position.

9.1.5 Omega (Leverage)

Optionen repräsentieren teilweise fremdfinanzierte Anlagen; der Wert einer Option repräasentiert das erforderliche Eigenkapital. Daraus resultiert ein Hebeleffekt: Wertveränderungen der Basisanlage schlagen sich – in Prozenten – um ein Vielfaches im Wert des Eigenkapitals und damit im Optionspreis nieder.

Das Omega ist definiert als:

$$\Omega = \frac{dC/C}{dS/S} = \frac{dC}{dS} \cdot \frac{S}{C} = \Delta \cdot \frac{Underlying}{Eigenkapital}$$

Der Quotient Underlying / Eigenkapital wird als Leverage-Faktor bezeichnet.

Daraus folgen zwei Kennzahlen: der synthetisch Eigen- und Fremdfinanzierungsgrad der Option:

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{Eigenkapitaleinsatz}{Aktiengehalt} = EFG \qquad \text{Eigenfinanzierungsgrad}$$

$$1 - \frac{1}{\Omega} = \frac{Fremdfinanzierung}{Aktiengehalt} = FFG \qquad \text{Fremdfinanzierungsgrad}$$

9.1.6 Call vs. Put

Die Greek Letters des Black-Scholes Modells in einer Übersicht für Calls und Puts:

	Call	Put
Delta	$\Delta_C = N(z_1)$	$\Delta_P = \Delta_C - 1$
Gamma	$\Gamma_C = \frac{N'(z_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$	$\Gamma_P = \Gamma_C$
Theta	$\Theta_C = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T}} N'(z_1) - rXe^{-rT} N(z_2)$	$\Theta_P = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T}} N'(z_1) + rXe^{-rT}[1 - N(z_2)]$
Vega	$Vega_C = N'(z_1) S\sigma\sqrt{T}$	$Vega_P = Vega_C$

9.2 Fundamentale partielle Differentialgleichung FPDE

Es wird das totale Differntial des Optionspreises gebildet:

$$dC(\tilde{S}, t) = \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 s^2 dt$$

$$dC(\tilde{S}, t) = \Delta dS + \Theta dt + \frac{1}{2} \cdot \Gamma \sigma^2 s^2 dt$$

Dank Itos Lemma ist bekannt, dass

$$\frac{dS}{S} = \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\sqrt{dt} \cdot \tilde{z}$$

Der risikoneutrale Bewertungsansatz impliziert, dass

$$\hat{E}\left(\frac{dC}{C}\right) = r \cdot dt$$

Wird das totale Differential für dC eingesetzt und umgeformt, so ergibt sich:

$$\Delta \cdot S \cdot r + \Theta + \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot \sigma^2 \cdot S^2 = C \cdot r$$

Hieraus folgt die fundamentale partielle Differentialgleichung FDPE:

$$(\Delta \cdot S - C) \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \Gamma \cdot \sigma^2 \cdot S^2 + \Theta = 0$$

Diese Gleichung liefert eine allgemeine Bewertungsmethode für Derivate. Sie zeigt ausserdem den Zusammenhang zwischen Δ, Γ und Θ auf.

So lässt sich zeigen, dass wenn das Gamma maximiert wird, das Theta immer unattraktiver wird. Eine höhere Konvexität lässt sich also nur durch einen unattraktiveren Zeitwert erkaufen.

9.3 Risikokomponenten der Option und ihre Bewertung

Die wohl wichtigste Implikation der FPDE ist, dass sich mit ihr der Optionspreis in seine Risikofaktoren aufspalten lässt und diese Risikofaktoren separat bewertet werden können. Eine einfache Umformung der FPDE liefert:

$$C = \Delta \cdot S + \Theta \cdot \frac{1}{r} + \Gamma \cdot \frac{{}^1\!/_2\,\sigma^2 S^2}{r}$$

Die Option hat also drei Exposures:

- aus dem Aktienkurs im Umfang ihres Aktiengehalts (Δ)
- aus der Zeit im Umfang der Laufzeit (Θ)
- aus der Konvexität im Umfang Γ

Diese Exposures sind jeweils mit einem Marktpreis versehen:

- der Marktpreis des Aktiengehalts entspricht dem Aktienkurs (S)
- der Marktpreis entspricht 1/r
- der Marktpreis der Konvexität entspricht $\frac{{}^1\!/_2\,\sigma^2 S^2}{r}$

10 Exotische Optionen

Die Innovation in den Finanzmärkten hat heute eine Unzahl an Derivaten geschaffen, die sich von den gewöhnlichen Plain-Vanilla Optionen und deren Kombinationen (Straddle, Butterfly etc) teils markant unterscheiden. Sehr oft treten aber exotische Optionen als Kontraktbestandteile anderer Produkte oder Anlageformen auf, zum Beispiel Management-Fees, Mitarbeiterbeteiligungen etc. Alles in allem ist das Pricing exotischer Optionen schwierig, weil es entweder nur recht illiquide Märkte (OTC) oder gar keine Märkte und somit nur "schlechte" Marktpreise gibt. Exotische Optionen lassen sich in drei Klassen einteilen:

- Kontraktmodifikationen
- Pfadabhängige Optionen
- Mehrfaktor Optionen

10.1 Kontraktmodifikationen

- Pay-Later Optionen
  Die Prämie wird erst bei Fälligkeit bezahlt und nur dann, wenn die Option im Geld liegt. Die Option muss allerdings ausgeübt werden, wenn sie im Geld liegt Ein Verlustrisiko ergibt sich bei diesem Kontrakt daraus, dass der geschuldete Optionspreis höher sein kann als der Ausübungswert der Option.
- Bermuda Optionen
  Sie sind ein Zwitter von amerikanischen und europäischen Optionen. Sie können nur zu ausgewählten Zeitpunkten oder über ausgewählte Zeitperioden hinweg ausgeübt werden.
- Digitale Optionen
  Im Falle einer Ausübung wird ein fixer Geldbetrag ausbezahlt. Im Unterschied zu einer gewöhnlichen Option ist der Ausübungswert nicht davon abhängig, wie stark die Option im Geld liegt.
- Delayed Options
  Hier hat der Inhaber der Option das Recht, im Ausübungsfalle eine neue Option mit einer bestimmten Laufzeit und einem Ausübungspreis, der dem Aktienkurs im Verfallszeitpunkt entspricht, zu beziehen.

10.2 Pfadabhängige Optionen

Bei pfadabhängigen Optionen ist der Ausübungswert einer Option nicht nur vom Kurs der Basisanlage im Verfallszeitpunkt abhängig, sondern vom gesamten "Pfad", den dieser Kurs seit dem Erwerb der Option durchschritten hat.

- Asiatische Optionen (Average Price Options)
  Der Ausübungswert der Option wird aufgrund des durchschnittlichen Aktienkurses während einer bestimmten Zeitdauer ermittelt. Asiatische Optionen dienen zum Beispiel zur Absicherung eines Zahlungsstromes bzw. eines typischen Währungsstromes während einer bestimmten Zeitperiode.
  Die Bewertung der asiatischen Option erfolgt in der Regel über (Monte Carlo) Simulationen.

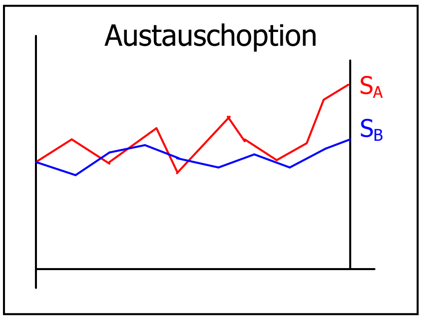
- Average Strike Optionen
  Hier wird der Ausübungspreis der Option erst bei Verfall (also retrospektiv) bestimmt, und zwar aufgrund des durchschnittlichen Aktienkurses über eine bestimmte Zeitperiode.
- Lookback Optionen
  Auch hier wird der Ausübungspreis erst beim Optionsverfall bestimmt, und zwar wird jener Aktienkurs während der verflossenen Laufzeit als Ausübungspreis genommen,

welcher für den Optionskäufer möglichst attraktiv ist. Bei einer Calloption wäre dies der tiefste Aktienkurs, der während der Laufzeit notiert wurde, bei einer Putoption der höchste.

- Barrier Optionen
  Neben dem Ausübungspreis wird zusätzlich ein Schwellenwert definiert. Bei einer Kick-In Option wird die Option erst existent, wenn der Aktenkurs den Schwellenwert überschritten hat, während bei einer Knock-Out Option die Option erlischt, sobald die Schwelle erreicht wird.
- Ratchet Optionen
  Der Ausübungspreis der Option wird zu ausgeählten Zeitpunkten dem jeweils geltenden Aktienkurs angepasst. Wird bei einem Call der Ausübungspreis erhöht, so wird der Gewinn gutgeschrieben, während bei einer Reduktion kein Abzug vorgenommen wird. Typischerweise werden Mitarbeiteroptionen als Ratchet Optionen ausgestaltet.

10.3 Mehrfaktoroptionen

- einfache Austauschoptionen (Exchange Options)
  "Das Recht, im Zeitpunkt T eine Aktie A gegen eine Aktie B zu tauschen." Ein Investor verfüge über eine Austauschoption W(B→A), also über das Recht, eine Aktien B gegen eine Aktie A auszutauschen. Im Fall, wie er nebenstehend dargestellt ist, ist die Option im Geld, weil S_A über S_B liegt. S_B definiert also in gewisser Weise den Ausübungspreis.



  Solche Austauschoptionen finden unter anderem in austauschbaren Wertschriften (z.B. Convertibles) Verwendung, aber auch in Outperformance-Produkten und bei der Bewertung von Management-Fees gegenüber einem stochastischen Benchmark.
  Bemerkenswert an Austauschoptionen ist, dass anders als bei Plain Vanillas hier zwei Zufallsvariablen S_A und S_B eine Rolle spielen, sowie die Korrelation / Kovarianz dieser beiden.
  Ein Bewertungsmodell für Austauschoptionen stammt von Margrabe (1978). Ausgehend von einem am Black-Scholes Modell angelehnten Ansatz muss gelten:

$$Tausch_{B\to A} = S_A \cdot N(z_1) - S_B \cdot N(z_2)$$
$$Tausch_{A\to B} = S_A \cdot [N(z_1)-1] - S_B \cdot [N(z_2)-1]$$

mit $z_1 = \dfrac{\ln\left[{S_A}/{S_B}\right] + {1}/{2}\,\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$

- Multi-Austausch Option
  Es steht eine Auswahl aus einem Marktbündel offen, aus dem die höchste Rendite ausgewählt werden kann (Austauschoption von A gegen B, C, D oder E)
- Komplexe Optionen (Compound Options)
  Komplexe Optionen sind Optionen auf Optionen. Sie dienen zur Absicherung der Absicherung, bzw. zur Absicherung gegen höhere Volatilitäten, welche den Preis der Absicherung erhöhen würden.
  Während einfache Optionen also der Absicherung des Preisrisikos dienen, dienen komplexe Optionen zur Absicherung des Volatilitätsrisikos.
- Quantos (Quantity Adjusted Options)
  Die Kontraktgrösse verändert sich in Abhängigkeit einer bestimmten Kontrollvariable.

11 Risikoneutrale Bewertung und Präferenzen

Cash Flows, die in unterschiedlichen States anfallen, haben einen unterschiedlichen Marktwert, es gibt also eine Zeitpräferenz und vermutlich auch einen Markt dafür. Ebenso verhält es sich mit Zuständen / Güteklassen von Gütern ("States"): je nach Zustand einer Rohware verändert sich deren Marktwert.

Dies erfordert einen Markt für zustandsabhängige Cash-Flows, sogenannte Zustands- oder Elementaranlagen. Die theoretischen Grundsätze zu deren Bewertung stammen von Arrow und Debreu (1953 resp. 1959).

Ein Markt wird erst dann als "vollständig" bezeichnet, wenn es für jeden Zustand eine Zustandsanlage gibt. In einem vollständigen Markt können beliebige zustandsabhängige Allokationen erreicht werden. Es resultiert eine pareto-effiziente Risikoallokation. Es ergeben sich Gleichgewichtspreise für Elementaranlgen.

Optionen als Bausteine zur Erzeugung sämtlicher Elementaranlagen sind unabdingbar zur Vervollständigung der Märkte: mit Butterfly Spreads lassen sich Elementaranlagen erzeugen sofern die Abstufung der Aktienkurse S_T jener der Ausübungspreise X entspricht. Der Preis eines Butterfly Spreads entspricht dann dem Preis der Elementaranlage.

	C	ΔC	Δ(ΔC) = C*
C(X=9)	1.50		
		0.60	
C(X=10)	0.90		0.20
		0.40	
C(X=11)	0.50		

Eine Zustandsanlage für den Zustand S_T = 10 kostet also heute 0.20 Geldeinheiten.

Mit anderen Worten: die Optionspreisstruktur über unterschiedliche X hinweg definiert also implizite Zustandspreise.

Offensichtlich unterscheiden sich Zustandspreise untereinander. Dafür gibt es zwei Gründe:

- Zustandswahrscheinlichkeiten / Eintretenswahrscheinlichkeiten
- Zustandspräferenz, Grenznutzen in einem Zustand, Risikopräferenz

Im Markt sei folgende Preisstruktur zu beobachten:

S	C*	π_S	$C^*/\pi_S = \Lambda_S$
9	0.40	0.20	2
10	0.20	0.30	0.666
11	0.1	0.20	0.5

Λ wird als Zustandsdeflator bezeichnet und gibt die reine Zustandspräferenz an. Es lässt sich beobachten, dass Payoffs in schlechten Zuständen bevorzug werden. Ökonomisch lässt sich das mit einer konvexen Nutzenfunktion erklären.

Entscheidend in diesem Zusammenhang ist jedoch, dass Risikoneutralität ein konstantes Λ über alle S impliziert. Die Unterschiede in Λ_S über Zustände hinweg sind verantwortlich für im Markt beobachtete Risikoprämien.

Die Volatilität des Λ lässt sich auffassen als "Sharpe Ratio des Marktes" bzw. als Marktpreis des Risikos (λ):

$$\sigma_\Lambda = \frac{E(R_m) - R}{\sigma_m} = \lambda$$

Diese Beziehung stellt den zentralen Schnittpunkt zwischen CAPM und Optionspreistheorie dar und wird deshalb auch als Pricing Kernel bezeichnet.

$$E(R_i) = R + (\rho_{im} \cdot \sigma_i) \cdot \lambda$$

In diesem Zusammenhang wird die Arrow-Pratt'sche Risikoaversion definiert als:

$$\eta = \frac{E(R_m) - R}{\sigma_m^2} = \sigma_\Lambda \frac{1}{\sigma_m}$$

$$\eta = -\frac{\Delta \ln[\Lambda(S)]}{\Delta \ln[S]}$$

Mit dieser Formel lässt sich die Struktur der Risikoaversion im Querschnitt der Zustände direkt analysieren. Es lässt sich zeigen, dass

$$\Lambda(S_t, dX) = e^{-rT} \frac{\frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left[\frac{S_T}{S_0}\right] - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)^2 \right]}{\frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left[\frac{S_T}{S_0}\right] - \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)^2 \right]}$$

Wird dieser Ausdruck logarithmiert und nach $\ln(S_T)$ abegeleitet, so ergibt sich:

$$\frac{d \ln[\Lambda(S_T)]}{d \ln[S_T]} = -\frac{\alpha - r}{\sigma^2} = -\eta$$

Dieser Ausdruck ist konstant, d.h. zustandsunabhängig. Der Grund liegt in der Annahme eines Wiener Prozesses mit konstanten Momenten und eines konstanten risikolosen Zinssatzes. Diese Gleichung beschreibt also eine Nutzenfunktion mit konstanter relativer Risikoaversion. Daraus kann abgeleitet werden, dass das Black-Scholes Modell genau dann eine korrekte, d.h. mit einem umfassenden Gleichgewicht kompatible Bewertung von Optionen auf das aggregierte Vermögen (oder welche Instrumentvariable auch immer als Mass für den Grenznutzen der Individuen herangezogen wird) liefert, wenn die aggregierte Nutzenfunktion der Individuen eine konstante relative Risikoaversion aufweist.

12 Generalized Options Pricing

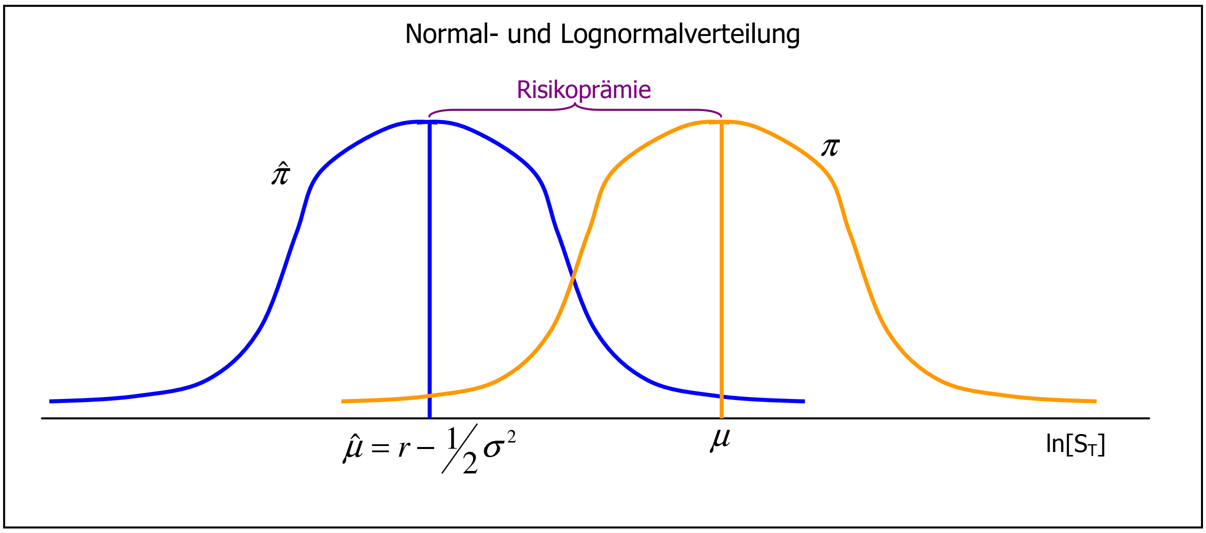
12.1 Grundidee

Alle bisher betrachteten Modelle setzen voraus, dass das Underlying gehandelt wird und einen Preis hat. Das Ziel der allgemeinen Optionspreistheorie ist es, das risikoneutrale

Bewertungsprinzip auf Fälle zu verallgemeinern, wo das Underlying kein traded Asset ist, z.B. Wachstumsoptionen, Corporate Securities und Zinsderivate.

Die risikoneutrale Bewertung unterscheidet sich vom traditionellen präferenzbasiertem Ansatz dadurch, dass bei ersterer keine Risikoprämien in die Abzinsformel eingehen, sondern der Erwartungswert mit dem risikolosen Zinssatz abgezinst wird.

Im Kontext von Normal- und Lognormalverteilung stellt sich das so dar:



Für die Risikoprämie gilt:

$$\mu - \hat{\mu} = \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 - r + \frac{1}{2}\sigma^2 = \alpha - r > 0$$

Bereits bei der allgemeinen Betrachtung der risikolosen Bewertung wurde gezeigt, dass

$$\frac{\alpha - r}{\sigma^2} = \eta .$$

Es ist: $\lambda \cdot \frac{1}{\sigma} = \eta$

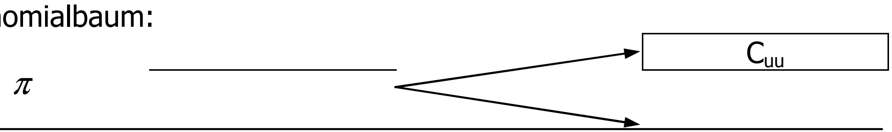
Dann ist: $\mu - \hat{\mu} = \frac{\alpha - r}{\sigma_S} \cdot \sigma_S = \lambda \cdot \sigma_S$

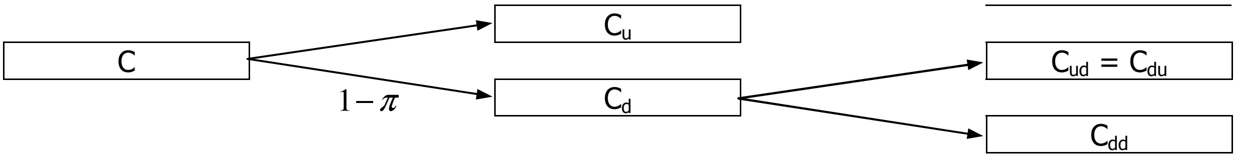
λ kann somit als Marktpreis des Risikos σ_s verstanden werden.

12.2 Allgemeine Bewertung

Die risikoneutrale Bewertung mit $\hat{\mu} = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ gilt nur dann, wenn das Underlying einen Preis hat, der sich im Markt beobachten lässt. Deshalb ist es eine Forderung im Black-Scholes Modell, dass das Underlying einen Preis hat. Die allgemeine (indirekte) risikoneutrale Bewertung erfolgt über den wahren, statistischen Erwartungswert und den Marktpreis des Risikos. Es wird ein allgemeiner statistischer Erwartungswert μ modelliert, und diese Dichte dann um λ·σ verschoben.

Ausgangspunkt ist ein Binomialbaum:





π ist die statistische Eintretenswahrscheinlichkeit des Zustandes C_u.

Die Volatilitätsfaktoren berechnen sich:

$$u = \frac{C_u}{C} = \frac{C_{uu}}{C_u} \quad \text{und} \quad d = \frac{C_d}{C} = \frac{C_{dd}}{C_d}$$

Aus π, u, d und der Anzahl der Schritte n im Binomialbaum lässt sich ein Erwartungswert für r_n bestimmen. Wobei r_n die stetieg Rendite des Derivates über n binomiale Kursveränderungen hinweg ist.

$$\mu(r_n) = n \cdot \left(\pi \cdot \ln\left[\frac{u}{d}\right] + \ln[d] \right)$$

und $$\sigma^2(r_n) = \pi \cdot (1-\pi) \cdot \ln\left[\frac{u}{d}\right]^2 \cdot n$$

Dies wird in $\hat{\mu} = \mu - \lambda \cdot \sigma$ eingesetzt. Für n = 1 ergibt sich dann:

$$\hat{\mu} = \pi \cdot \ln\left[\frac{u}{d}\right] + \ln[d] - \lambda \cdot \sqrt{\pi(1-\pi)} \cdot \ln\left[\frac{u}{d}\right]$$

Der Term $\lambda^* = \lambda \cdot \sqrt{\pi(1-\pi)}$ wird als "probability adjusted market price of risk" bezeichnet. Die Formel für den risikolosen Erwartungswert vereinfacht sich damit zu:

$$\hat{\mu} = (\pi - \lambda^*) \cdot \ln\left[\frac{u}{d}\right] + \ln[d]$$

Über $\mu = \pi \cdot \ln\left[\frac{u}{d}\right] + \ln[d]$ lässt sich zeigen, dass

$$\hat{\pi} = \pi - \lambda^* \quad \text{und} \quad (1-\hat{\pi}) = 1 - \pi + \lambda^*$$

Um von der statistischen Binomialverteilung zur risikoneutralen Lognormalverteilung zu gelangen, werden die Wahrscheinlichkeiten $\pi \rightarrow \hat{\pi}$ ersetzt.

In der Praxis kommen solche allgemeinen Bewertungsmodelle verbreitet zum Einsatz, so zum Beispiel bei Zinsderivaten, zur Bewertung von Kreditrisiko, bei Realoptionen, für Versicherungsderivate und bei diversen exotischen Optionen.

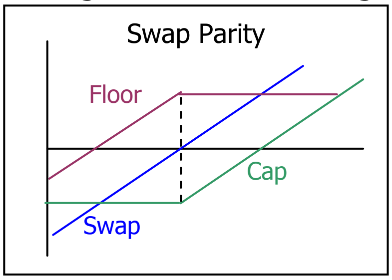
12.3 Anwendung: Zinsderivate

12.3.1 Klassifikation und Swap Parität

- Caplet (Zins-Calloption): Das Recht, Geld zu r* aufzunehmen.
- Cap: Sequenz von Verfallsterminen (Portfolio von Caplets).

- Floorlet (Zins-Putoption): Das Recht, Geld zu r* anzulegen.
- Floor: Sequenz von Verfallsterminen (Portfolio von Floorlets).
- Forward Rate Agreement (FRA): Zins-Termingeschäft. Der Käufer eines FRA (long FRA) verpflichtet sich, auf ein (gewöhnlich nicht ausgetauschtes) Underlying einen fixen Zins zu leisten und erhält dafür einen flexiblen Zins. Wenn der Käufer also 6.00% für das FRA bezahlt, der Zins aber bei Verfall bei 6.20% liegt, so erhält der Käufer 20 Basispunkte.
- Zinsswap (IRS): Sequenz von Verfallterminen bzw. FRAs.

Analog zur Put-Call-Parität gibt es auch eine Swap-Parität:



Cap($r^* = r_f$) = Floor ($r^* = r_f$)
allgemein: Cap ($r^* > r_f$) < Floor ($r^* > r_f$)

r_f ist der Swapsatz.

long Cap + short Floor = Payer Swap,
short Cap + long Floor = Receiver Swap